

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2023 год, вариант 2

1. Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni x, y, z + \frac{\pi}{4} \operatorname{arctg} - = x, y, z + \frac{\pi}{4} = x$$

2. Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

$$20402$$

3. Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x - 1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0.$$

$$\{1\} \cap \left[\frac{2}{3}; 0 \right) \ni x$$

4. На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

$$\frac{08}{688} = S, \frac{09}{257} = a$$

5. Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E — середины сторон AC и AB соответственно, CF — биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \operatorname{arcsin} = \sqrt{7}, \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} = \sqrt{7}, 06 = \sqrt{7}$$

6. Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения xyz .

$$\frac{1}{2}$$

7. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD — высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объем пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

$$\frac{8\sqrt{5} + 9}{8\sqrt{5}} \left(9; \frac{8\sqrt{5}}{1} \right) (e)$$