

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2022 год, вариант 2

1. Числа a, b, c — соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < b < a$). Большой корень уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

1

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = 17, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = -10. \end{cases}$$

14-13

3. Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

81

4. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм с тупым углом C . Пусть E — точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC , проходящим через C , а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N . Известно, что $CN = 6$, $AN = 12$, а $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\angle ADC) = \frac{4}{5}$.

1. Найдите $\operatorname{tg} \angle BAC$.

2. Найдите площадь треугольника ENA .

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{13}{5}, S_{\triangle AEN} = \frac{135}{2}$$

5. Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN , касается стороны AB в точке A . Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K . Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырёхугольника $ANKM$, если известно, что $AB = 3\sqrt{3}$, $BM = \sqrt{6}$.

$$\angle ACB = 90^\circ, R = \frac{2\sqrt{3}}{3}, S_{ANKM} = \frac{11\sqrt{3}}{4}$$

6. На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них чётны, но не делятся на 3, остальные же делятся на 3 и при этом нечётны. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно чётное и хотя бы одно кратное 3, можно 25 способами. Сколько было выписано чисел?

2

7. Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$-\frac{10x + 10}{5x + 6} \leq ax + b \leq 5x + 2 + |10x + 6|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-1; -\frac{2}{5}]$.

$\frac{z}{q} = p, \frac{z}{q} = v$
