

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2021 год

1. Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 2$, $EN = 5$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.

$$\boxed{\angle ABC = 60^\circ; S_{\triangle ABC} = 36\sqrt{3}; R = 2\sqrt{13}}$$

2. На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое увеличить в 32 раза, то сумма чисел на доске станет равной 477. Если же самое большое число увеличить в 14 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 477. Какие числа могли быть написаны на доске?

$$\boxed{13, 14, 16, 17, 18, 30, 31 \text{ или } 18, 32}$$

3. На плоскости Oxy даны точка A , координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B , заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0$. Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $y = 1$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

$$\boxed{(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)}$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + \frac{2}{3}x^2y^2 = 17. \end{cases}$$

$$\boxed{(\sqrt{2}; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})}$$

5. У фокусника есть набор из 12^2 различных карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая — синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 12. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?

$$\boxed{9841}$$

6. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD — правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .

а) Докажите, что ABT — правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 3$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

$\frac{57}{61}$ (9)