

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2021 год

1. S — сумма первых 10 членов возрастающей арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, \dots , состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6 a_{12} > S + 1$, $a_7 a_{11} < S + 17$. Укажите все возможные значения a_1 .

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6;

2. Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 6$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра — наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

$\frac{3\sqrt{2}}{2} \mp \frac{3\sqrt{3}}{2}$

3. Пусть M — фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек $(x; y)$ таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 2, \\ a^2 + b^2 \leq \min(2a + 2b; 2). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M .

$\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

4. Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 6, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}. \end{cases}$$

0962

5. Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

$\frac{7}{2} = x$

6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A , O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведённые через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 6 и 4.

а) Найдите площадь треугольника ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{7}{5}$. Найдите AC .

$\frac{7}{5} \wedge = \text{arctg} \frac{7}{5} = \text{arctg} \frac{7}{5}$
--