

## Олимпиада «Физтех» по математике

### 9 класс, 2019 год, вариант 1

1. Даны квадратные трёхчлены  $f_1(x) = x^2 - ax - 3$ ,  $f_2(x) = x^2 + 2x - b$ ,  $f_3(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x - 6 - b$  и  $f_4(x) = 3x^2 + (4 - a)x - 3 - 2b$ . Пусть разности корней равны соответственно  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Известно, что  $|C| \neq |D|$ . Найдите отношение  $\frac{A^2 - B^2}{C^2 - D^2}$ . Значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $a$ ,  $b$  не заданы.

8

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 3xy = -1, \\ 9x^2y^2 + 9x^2 + y^2 - 6xy = 13. \end{cases}$$

$$\left( \frac{z}{\frac{z}{1}} - \right) \cdot \left( \frac{z}{\frac{z}{1}} - \right) \cdot \left( \frac{z}{\frac{z}{1}} - \right) \cdot \left( \frac{z}{\frac{z}{1}} - \right)$$

3. В прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) вписана окружность  $\Gamma$  с центром  $I$ , которая касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $I$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите радиус окружности  $\Gamma$ , если  $MK = 144$ ,  $NL = 25$ . Найдите  $AC$ , если дополнительно известно, что прямая  $MN$  параллельна  $AC$ .

$$068 = \text{CV} \cdot 09 = \text{A}$$

4. На столе лежат 100 различных карточек с числами 3, 6, 9, ..., 297, 300 (на каждой карточке ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 5?

066

5. Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ,  $AD > BC$ ). Окружность  $\Omega$  вписана в угол  $BAD$ , касается отрезка  $BC$  в точке  $C$  и повторно пересекает  $CD$  в точке  $E$ , так что  $CE = 9$ ,  $ED = 16$ . Найдите радиус окружности  $\Omega$  и площадь трапеции  $ABCD$ .

$$\frac{z}{\frac{z}{1}} = \text{CV} \cdot \frac{z}{\frac{z}{1}} = \text{A}$$

6. При каких значениях параметра  $a$  среди решений неравенства  $(x + 2)\sqrt{ax + x - x^2 - a} \geq 0$  найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

$$(\infty + \frac{z}{1}) \cap [z - \frac{z}{1}] \ni \text{A}$$

7. На координатной плоскости рассматривается фигура  $M$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |y| + |4 + y| \leq 4, \\ \frac{x - y^2 - 4y - 3}{2y - x + 3} \geq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру  $M$  и найдите ее площадь.

8