Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2019 год, вариант 2

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 1$ и $y = f(x)$ равно $3\sqrt{2}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) - 2$ равно $\sqrt{10}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

$\boxed{\sqrt{26}}$

2. Известно, что

$$\frac{\cos 3x}{(2\cos 2x - 1)\cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2(x+y) \quad \text{и} \quad \frac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin y} = \frac{3}{5} + \sin^2(x+y).$$

Найдите все возможные значения выражения $\cos(x + 3y)$, если известно, что их не менее двух.

$\boxed{-1 \text{ или } \frac{1}{5}}$

3. Есть 207 различных карточек с числами $1, 2, 3, 2^2, 3^2, \ldots, 2^{103}, 3^{103}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 6?

$\boxed{267903}$

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 2 : 3$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T — центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

$\boxed{\text{а) } AP = 8;\ \text{б) } PT = \frac{\sqrt{409}-5}{2},\ S_{\triangle APC} = \frac{5760}{409}}$

5. Решите неравенство

$$\log_{1+x^2}\left(1 + 27x^5\right) + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1 + x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1 + 27x^5\right).$$

$\boxed{x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[5]{27}}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{27}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{2}{27}}\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}}$

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y \sin 2a - x \cos 2a), \\ x^2 + y^2 = 26(y \cos 3a - x \sin 3a) \end{cases}$$

существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 10.

$a = \frac{\pi}{10} \mp \frac{2}{5} \operatorname{arctg} \frac{12}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, где $n \in \mathbb{Z}$

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 — равносторонний. На ребре CC_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника ABA_1 и касается отрезка CC_1 в точке M.

а) Найдите длину ребра AB.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ABA_1, а также длину ребра A_1C_1.

а) $AB = \sqrt{15}$; б) $\angle(CC_1, ABA_1) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$, $A_1C_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$