Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2019 год, вариант 1

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax + 2$, $f_2(x) = x^2 + 3x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (3-2a)x + 4 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (6-a)x + 2 + 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

$\boxed{\frac{1}{3}}$

2. Известно, что

$$\frac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{x+y}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -6\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}.$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

$\boxed{-1,\ \frac{12}{35} \text{ или } -\frac{12}{35}}$

3. На столе лежат 130 различных карточек с числами 502, 504, 506, …, 758, 760 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

$\boxed{119282}$

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 42$, $DH = HC = 4$. Найдите длине отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

$\boxed{HP = 7\sqrt{46},\ r = 5\sqrt{\frac{138}{7}},\ R = 5\sqrt{\frac{322}{3}}}$

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right) \cdot \log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)+1\right) \log_{1-16x^4}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}\right) \geqslant 1.$$

$\boxed{x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}; -\frac{1}{9}\right) \cup \left[-\frac{1}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]}$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{3}{4}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек — начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{3}{4}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

$\boxed{b = \frac{25}{12}}$

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 18$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка CQ.

а) $\angle SAB = \arccos \frac{1}{6}$; б) $CQ = \frac{52}{3}$