Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2019 год, вариант 1

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2-2ax+3$, $f_2(x) = x^2+x+b$, $f_3(x) = 3x^2+(1-4a)x+6+b$ и $f_4(x) = 3x^2+(2-2a)x+3+2b$. Пусть разности корней равны соответственно A, B, C и D. Известно, что $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

$\boxed{\frac{1}{3}}$

2. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \sqrt{21-x^2-4x} \quad \text{и} \quad g(x) = |x+2|$$

определены, причём $\min(f(x); g(x)) > \frac{x+4}{2}$.

$\boxed{x \in \left[-7; -\frac{8}{3}\right) \cup (0; 2)}$

3. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы кубов всех её членов к сумме всех членов этой прогрессии равно $\frac{48}{7}$, а отношение суммы четвертых степеней членов к сумме квадратов членов этой прогрессии равно $\frac{144}{17}$.

$\boxed{b_1 = \pm 3,\ q = \frac{1}{4}}$

4. Дана равнобокая трапеция $ABCD$, ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD, касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E так, что $CE = 9$, $ED = 7$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

$\boxed{R = 6,\ S_{ABCD} = 96 + 24\sqrt{7}}$

5. На столе лежат 140 различных карточек с числами 3, 6, 9, …, 417, 420 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?

$\boxed{1390}$

6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x-1| + |5-x| \leqslant 4, \\ \dfrac{x^2-6x+2y+7}{y+x-4} \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

$\boxed{4}$

7. Окружности ω и Ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей ω и Ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность Ω в точке C, а также пересекает ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка H лежит между точками P и F). Известно, что $BC = 60$, $DH = HC = 2$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

$\boxed{HP = 6\sqrt{31},\ r = 8\sqrt{\frac{93}{5}},\ R = 8\sqrt{\frac{155}{5}}}$