

# Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

9 класс, 2023 год

1. Найдите все пары простых чисел  $p$  и  $q$ , для которых выполнено равенство

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}.$$

*Напоминаем, что «простыми» называют натуральные числа, отличные от 1, которые делятся только на 1 и на само себя.*

2. В городе 10 проспектов и 23 улицы, которые образуют прямоугольную сетку: все улицы параллельны между собой и все проспекты перпендикулярны улицам (см. рис.). Точку пересечения улицы и проспекта будем называть «перекрёстком». Городские власти проводят дорожные работы на некоторых участках дороги (отрезок улицы или проспекта между соседними перекрёстками). Во время ремонта ездить по этому участку нельзя. Какое наибольшее количество участков можно ремонтировать одновременно, чтобы при этом из любого перекрестка можно было проехать на любой другой?



3. На кухне лежит пакет с пакетами. Каждый из пакетов либо пустой (не содержит других пакетов), либо содержит ровно 5 пакетов (в некоторых из них могут быть другие пакеты). Определите, сколько всего пакетов, если известно, что 101 пакет пустой.

4. Дана последовательность чисел, члены которой удовлетворяют соотношению:

$$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$$

при всех  $n = 4, 5, 6, \dots$ . Найдите  $b_{2023}$ , если известно, что  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 2$ .

5. Алиса и Боря по очереди зачёркивают буквы в надписи «Покори Воробьёвы горы». За ход разрешается зачеркнуть одну букву или несколько одинаковых букв (большие и маленькие буквы не различаются). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Алиса ходит первой. Есть ли у одного из игроков стратегия, гарантированно позволяющая выиграть?

6. Через концы дуги  $\widehat{AB}$ , угловая величина которой равна  $60^\circ$ , проведены параллельные хорды  $BC$  и  $AD$ , причём длина  $BC$  в четыре раза меньше длины  $AD$ . Хорды  $AB$  и  $CD$  продолжены до пересечения в точке  $E$ . Найдите площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $|AC| = 30$ .