

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

5–6 классы, 2023 год

1. На острове Рыцарей и Лжецов живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Недавно на острове появилось новое племя — Двурушники. Они говорят правду или ложь через раз, т. е. если двурушник сказал правду, то в следующий раз обязательно скажет ложь — и наоборот. Однажды путешественник спросил троих жителей А, В и С — кто они.

А сказал: «В — двурушник».

В ответил — «Это неправда».

С сказал — «В сейчас солгал».

А сказал — «С сейчас солгал».

Определите, кем является А.

2. На кухне лежит пакет с пакетами. Каждый из пакетов либо пустой (не содержит других пакетов), либо содержит ровно 5 пакетов (в некоторых из них могут быть другие пакеты). Определите, сколько всего пакетов, если известно, что 101 пакет пустой.

3. Пусть $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$ и дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Какой остаток даёт a при делении на 601?

4. Найдите все пары простых чисел p и q , для которых выполнено равенство

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}.$$

Напоминаем, что «простыми» называют натуральные числа, отличные от 1, которые делятся только на 1 и на само себя.

5. Существуют ли три попарно различные натуральные числа a, b, c такие, что $a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}$ является квадратом целого числа?

6. В городе 10 проспектов и 23 улицы, которые образуют прямоугольную сетку: все улицы параллельны между собой и все проспекты перпендикулярны улицам (см. рис.). Точку пересечения улицы и проспекта будем называть «перекрёстком». Городские власти проводят дорожные работы на некоторых участках дороги (отрезок улицы или проспекта между соседними перекрёстками). Во время ремонта ездить по этому участку нельзя. Какое наибольшее количество участков можно ремонтировать одновременно, чтобы при этом из любого перекрестка можно было проехать на любой другой?

