

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

11 класс, 2023 год

1. Решите уравнение

$$1 - \sqrt{2} \sin x (\cos x + 2 \sin x) + \sqrt{2} \cos x (2 \cos x - \sin x) = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{u^2} + \frac{8}{u}$$

2. Из пункта A в пункт B по одной дороге с постоянными скоростями выехали велосипедист и мотоциклист. Один из них выехал в 13:00, а другой на час позже, при этом в пункт B они прибыли одновременно, хотя один из них сделал остановку в пути длительностью 2 часа. В котором часу они прибыли в B , если скорость мотоциклиста в два раза больше скорости велосипедиста?

$$16:00 \text{ или } 19:00$$

3. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 9$. При каких значениях a, b, c корнями уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ являются числа $x_1 + x_2, x_2 + x_3$ и $x_3 + x_1$?

$$a = -12, b = 43, c = -41$$

4. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = \sqrt{13}$.

$$12$$

5. На сфере расположены точки A, B, C таким образом, что минимальные расстояния по поверхности сферы от точки A до точки B , от точки A до точки C и от точки B до точки C равны $6\pi, 8\pi, 10\pi$ соответственно. Найдите минимальный возможный при таких условиях периметр треугольника ABC .

$$\left(9\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \right) 9 = \left(\frac{21}{5} \sin \frac{3}{2} + \sin \frac{4}{2} + \sin \frac{5}{2} \right) 24$$

6. Для натурального числа N выписали все его натуральные делители p_i в порядке возрастания: $1 = p_1 < p_2 < \dots < p_k = N$. Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\sigma(N)$. Найдите все возможные значения $\sigma(N^3)$, если известно, что

$$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geq N^2.$$

$$5629, 5632, 5635, 11260, 11260, 13132, 14992, 26236$$