Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

11 класс, 2022 год

1. Какое число окажется на 2022-м месте в бесконечной последовательности 6, 7, 8, 9, 10, ..., если в ней удалить все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел (то есть удалить числа $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, ...)?

$\boxed{2079}$

2. Решите неравенство $(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leqslant \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$.

$\boxed{x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}}$

3. Среди всех вписанных четырёхугольников найдите четырёхугольник $ABCD$ с наименьшим периметром, в котором $AB = BC = CD$ и все попарные расстояния между точками A, B, C и D выражаются целыми числами. Чему при этом равен радиус описанной вокруг $ABCD$ окружности?

$\boxed{\frac{8}{\sqrt{7}}}$

4. Последовательность a_n задана формулами $a_1 = \frac{4043}{2022}$, $a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$. Найдётся ли натуральное число n такое, что $|a_n| \leqslant \frac{2022}{2021}$? Обоснуйте свой ответ.

$\boxed{\text{Да}}$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Боковые грани SAB и SAC перпендикулярны плоскости ABC. Сфера радиусом, равным AC, с центром в точке S делит пирамиду на две части. Найдите объём большей из этих частей, если $SA = AB = 2$.

$\boxed{\frac{\pi(15-8\sqrt{2})}{9}}$

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\left|x^3 + 2x^2 + x + a\right| + \left|x^3 - 2x^2 + x - a\right| < 4x^2 + 8x$$

представляет собой на числовой прямой промежуток длиной 1.

$\boxed{a = -24 \text{ или } a = 8}$