Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2019 год, Челябинск

1. Решите уравнение в целых числах $x + 3xy + y = 2019 - 3y^2$.

$\boxed{(-221, 224);\ (2019, 0)}$

2. Решите уравнение $\log_{2/9} 2 = (\log_x 2) \cdot (\log_{4x} 2) \cdot (\log_{9x} 2)$.

$\boxed{\frac{1}{2};\ 2^{\frac{-\log_2 9 - 1 \pm \sqrt{\log_2^2 9 - 2\log_2 9 + 5}}{2}}}$

3. При каких значениях a существует b такое, что уравнение

$$\sin^2 b \sin x + \cos^2 b \cos x = a$$

не имеет решений?

$\boxed{a \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)}$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD = \angle CDB$ и $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$.

1. Можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность?
2. Найдите минимум отношения стороны BC к стороне AD.

$\boxed{\text{1) нет; 2) } \frac{1}{2}}$

5. В 9:00 из пункта A в пункт B выехали велосипедист Петр и мотоциклист Василий, а из B в A по той же дороге выехал мотоциклист Георгий. В 10:00 мотоциклисты встретились и зашли в кафе, проведя там не менее 75 мин и расставшись в тот момент, когда Петр проезжал мимо. Продолжив движение, Василий прибыл в пункт B не позже 11:55, а Георгий прибыл в конечный пункт одновременно с Петром. Найдите время прибытия Петра и Георгия, если скорости всех участников постоянны.

$\boxed{12{:}45}$