# Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

## 10–11 классы, 2019 год, Кемерово

**1.** Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \dfrac{y}{2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \dfrac{y}{2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ или } x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k}$

**2.** Решите неравенство

$$\sqrt{4x + 1 - 12\sqrt{x-2}} + \sqrt{4x + 8 - 16\sqrt{x-2}} \leqslant \log_{1/4}\left(x - \frac{17}{4}\right).$$

$\boxed{\left(\frac{17}{4}; \frac{9}{2}\right]}$

**3.** Две смежные боковые грани пирамиды, в основании которой лежит квадрат, перпендикулярны плоскости основания. Двугранный угол между двумя другими боковыми гранями равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите отношение высоты пирамиды к стороне основания.

$\boxed{1}$

**4.** Найдите все тройки натуральных чисел $(m, n, k)$ такие, что

$$m^3 + n^3 = k! + 32.$$

$\boxed{(3,5,5);\ (5,3,5)}$

**5.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$a^2\left(x^2+1\right)^3 + \left(x^3+1\right)^2 = 12ax^3$$

имеет единственное решение.

$\boxed{\frac{3}{2};\ 0;\ \frac{1}{2};\ 1}$