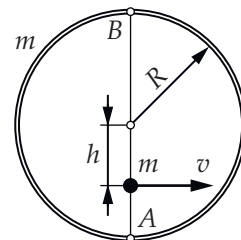


## Московская олимпиада школьников по физике

11 класс, второй тур, 2022 год

**ЗАДАЧА 1. Бильярд на льду.** На ровную горизонтальную поверхность ледяного катка положили однородный тонкий обруч радиусом  $R$  и массой  $m$ . В точку, лежащую на диаметре обруча  $AB$ , на неизвестном расстоянии  $h$  от центра обруча поместили шайбу массой  $m$  и сообщили ей скорость  $v$ , направленную перпендикулярно  $AB$ . Взаимодействие между шайбой и обручем абсолютно упругое. После столкновения с обручем шайба и обруч движутся так, что в следующий раз шайба попадёт в точку  $B$  обруча. Радиус шайбы пренебрежимо мал, трения нет, обруч можно считать абсолютно твёрдым телом. Определите расстояние  $h$ .



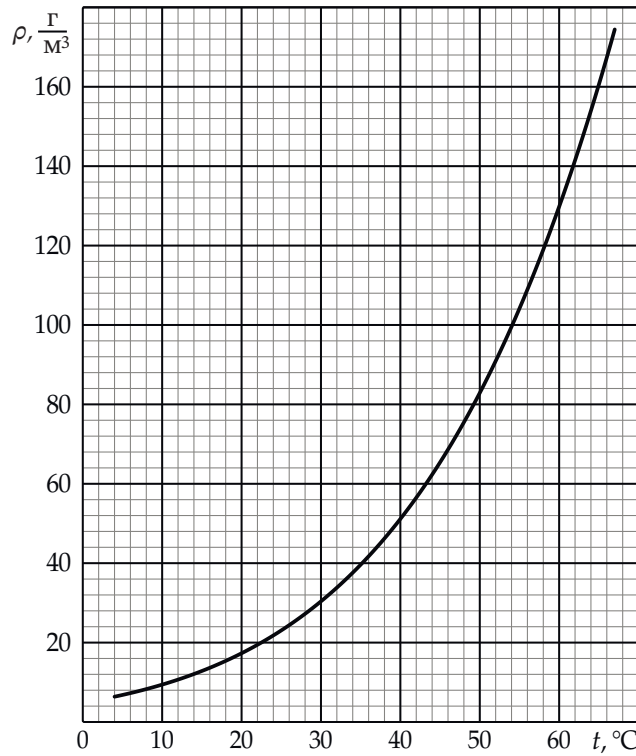
$$h/R = \eta$$

**ЗАДАЧА 2. Треугольники на тетраэдре.** На грани правильного тетраэдра, изготовленного из пенопласта (диэлектрическая проницаемость равна 1), наклеена одинаковые тонкие металлические пластины в форме правильных треугольников, почти совпадающие по размерам с гранями тетраэдра. Электрического контакта между пластинами нет. Заряд любой пластины изначально равен нулю. Если одной пластине сообщить заряд  $Q$ , то её потенциал будет равен  $Q/C_0$ . Если теперь заземлить любую незаряженную пластину, то потенциал заряженной окажется равен  $Q/C_1$ . Найдите разность потенциалов двух пластин, если на одну из них нанесён заряд  $Q$ , а заряд второй равен  $-Q$ , при условии, что другие две пластины не заряжены. Чему равна ёмкость конденсатора, одной обкладкой которого является любая пластина тетраэдра, а другой — три оставшиеся пластины, соединённые друг с другом идеальным проводником?

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z} - 1}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \frac{1}{\varepsilon} = \rho : \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 1 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \rho \nabla$$

**ЗАДАЧА 3. В сосуде.** В невесомости в высоком цилиндрическом сосуде с площадью основания  $0,05 \text{ м}^2$  находится вода массой  $m$  в жидком состоянии и влажный воздух, давление которого в любой точке сосуда равно внешнему давлению  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ , а температура равна температуре воды и равна  $t = 65^\circ \text{С}$ . Сосуд открыт сверху, поэтому относительная влажность воздуха в сосуде вследствие диффузии меняется линейно в зависимости от расстояния  $x$  до его дна, покрытого водой. Можно считать, что вблизи дна влажность равна 100%, а на расстоянии  $H = 1 \text{ м}$  от дна она уменьшается до 20%. График зависимости плотности насыщенных паров воды от температуры показан на приведённом ниже рисунке.

Молярные массы сухого воздуха и воды равны  $29 \text{ г/моль}$  и  $18 \text{ г/моль}$  соответственно. Универсальная газовая постоянная равна  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .



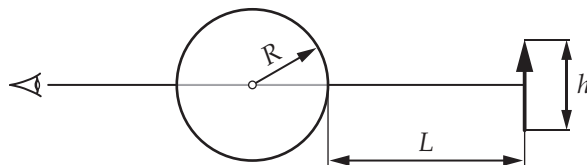
**А.** Пусть в начальный момент масса воды в жидком состоянии равна  $m_1 = 32$  г. Сосуд герметизируют, устанавливая специальную тонкую жёсткую задвижку на высоте  $H = 1$  м. После этого температуру в сосуде медленно увеличивают до  $100^\circ\text{C}$ . Найдите давление в сосуде в конечном состоянии.

**В.** В этом случае начальная масса жидкости в сосуде равна  $m_2 = 1,2$  г. На расстоянии  $H$  от дна сосуда устанавливают поршень, который может скользить без трения вдоль оси сосуда. После этого температуру в сосуде начинают медленно уменьшать. Найдите расстояние от дна сосуда до поршня при температуре  $60^\circ\text{C}$  и  $10^\circ\text{C}$ .

$$\rho(100^\circ\text{C}) = \rho_H; \rho(60^\circ\text{C}) = \rho_H; \rho(10^\circ\text{C}) = \rho_H$$

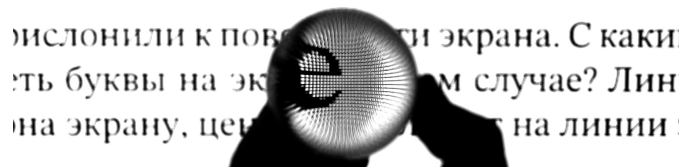
**Задача 4. Через шар.** В этой задаче предлагается проанализировать изображения плоских предметов в прозрачном шаре радиусом  $R$ , изготовленном из стекла с показателем преломления  $n = 3/2$ . Во всех частях задачи можно считать линию зрения перпендикулярной плоскости предмета, а центр шара — лежащим на линии зрения, как показано на схематичном рисунке ниже. Предлагается рассматривать только те изображения, которые формируются параксиальными (приосевыми) лучами.

Линейным увеличением  $\beta$  назовём отношение перпендикулярного линии зрения размера изображения  $h'$  к соответствующему размеру предмета  $h$ .



**А.** В шаре наблюдают изображение удалённого предмета размером  $h$ . Расстояние от шара до предмета равно  $L$ :  $L \gg R$ ,  $L \gg h$  (см. рисунок выше). Определите зависимость  $\beta(L)$ .

**В.** Шар прислонили к поверхности экрана компьютерного монитора. С каким увеличением  $\beta$  можно видеть буквы (и отдельные пиксели) на экране в этом случае.



С. На приведённом выше фрагменте фотографии экрана компьютерного монитора, к которому прижат стеклянный шар, наблюдается увеличенное в шаре изображение пикселей.

Пусть шар радиусом  $R = 2$  см прижали к экрану монитора и сфотографировали с расстояния  $S = 1$  м, при этом центр шара находился вблизи оптической оси объектива, перпендикулярной плоскости экрана. Разрешение монитора составляло  $2560 \times 1440$  пикселей, а длина диагонали экрана — 32 дюйма. Размеры светочувствительной матрицы фотоаппарата были равны  $23,5 \times 15,6$  мм. Оказалось, что изображение в шаре горизонтального отрезка экрана из 20 пикселей занимает на фотографии чуть больше 100 точек при размере длинной стороны фотографии 3000 точек. Определите по этим данным фокусное расстояние  $F$  объектива фотоаппарата. Учтите, что  $F \ll S$ , 1 дюйм  $\approx 2,54$  см.

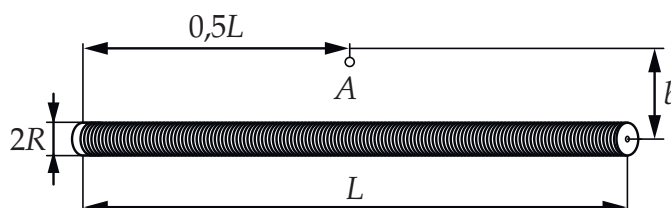
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{g}; \quad \frac{H}{h} = \frac{g}{f}$$

**ЗАДАЧА 5. Аналогии. А.** В вакууме, в области, где нет зарядов и токов, электрическое и магнитное поля описываются одинаковыми с математической точки зрения дифференциальными уравнениями (с точностью до знаков и постоянных множителей), поэтому картины линий этих полей вдали от источников очень похожи. Например, напряжённость поля точечного электрического диполя ( $\vec{p} = q\vec{l}$  — дипольный момент) в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$  даётся формулой

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^4} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right),$$

которая превращается в формулу для индукции магнитного поля витка с током (магнитного диполя) при замене:  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$ ,  $\vec{p} \rightarrow \vec{\mu}$ ;  $\vec{\mu} = IS\vec{n}$  — магнитный момент витка площадью  $S$  с током  $I$ ,  $\vec{n}$  — вектор единичной нормали к плоскости витка. Рассмотрим соленоид с количеством витков  $N$  ( $N \gg 1$ ) длиной  $L$ , намотанный достаточно тонким проводом виток к витку на полый цилиндрический немагнитный сердечник с радиусом основания  $R$  ( $R \ll L$ ). По виткам соленоида течёт ток  $I$ .

- A1) На большом расстоянии от витков соленоида его поле эквивалентно полю двух фиктивных магнитных зарядов, расположенных на торцах соленоида. Найдите модуль магнитного заряда  $Q_M$  любого из торцов соленоида.
- A2) Чему равна индукция магнитного поля соленоида в точке  $A$  (см. рисунок) на расстоянии  $b$  ( $b \gg R, b \ll L$ ) от его оси?



- A3) Найдите индукцию магнитного поля соленоида в точке, лежащей вне соленоида на его оси на расстоянии  $h$  ( $R \ll h \ll L$ ) от его торца.

**В.** Аналогию можно развить, обратив внимание на то, что напряжённость вихревого электрического поля, порождаемого изменяющимся магнитным полем бесконечного соленоида, на расстоянии, много большем радиуса соленоида, описывается соотношением, очень похожим на формулу  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  для индукции магнитного поля прямолинейного провода с током  $I$  на расстоянии  $r$  от него.

В1) Найдите напряжённость вихревого электрического поля на расстоянии  $b$  от оси очень длинного цилиндрического соленоида радиусом  $a$  ( $b > a$ ), магнитное поле в котором изменяется с известной скоростью  $\frac{dB}{dt}$ .

Тонкую цилиндрическую трубку с радиусом основания  $r$  и длиной  $2\pi R$  ( $R \gg r$ ) из немагнитного материала согнули в кольцо, на которое после намотали  $N$  ( $N \gg 1$ ) витков тонкого провода виток к витку, так что получилась тороидальная катушка. Выводы катушки подключили к специальному источнику напряжения, в итоге ток в катушке в зависимости от времени начал изменяться по закону  $I(t) = kt$ , где  $k$  — известная постоянная.

В2) Определите напряжённость вихревого электрического поля в центре тора.

В3) На главной оси тора на расстоянии  $h$  от него ( $h \gg R$ ) располагается точечный заряд  $q$ . Какая сила действует на заряд со стороны вихревого электрического поля?

$\text{A1) } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dot{\Phi} = -\dot{\int \vec{B} \cdot d\vec{S}} = -\dot{\int \mu_0 n I \frac{1}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 \cdot dt} = -\mu_0 n I \dot{\int \frac{1}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 \cdot dt} = -\mu_0 n I \dot{\int dt} = -\mu_0 n I \dot{t} = -\mu_0 n I \dot{I} = -\mu_0 n I k$
---