Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

8–9 классы, 2022 год

1. Состоятельный Крот сообщил Дюймовочке, что если разделить ее рост в сантиметрах на три и найденное число уменьшить на 10%, то получится ее рост в дюймах. Дюймовочка решила, что если ее рост в дюймах умножить на 3 и увеличить найденное число на 10%, то получится ее рост в сантиметрах. Крот указал на ошибку и назвал число, равное количеству процентов, на которые следует увеличить удвоенный рост Дюймовочки в дюймах чтобы получить верный рост в сантиметрах. Какое число назвал Крот? На сколько процентов от верного значения ошиблась Дюймовочка?

2. Натуральное число n является произведением $2k+1$ простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{2k+1}$ в некоторых степенях, больших нуля. Может ли $\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \ldots - \frac{n}{p_{2k}} + \frac{n}{p_{2k+1}} = 0$?

3. На продолжении биссектрисы CL треугольника ABC за точку L взята точка M, так что $LM = AC$, $CM = BC$. Докажите, что BM меньше периметра треугольника ACL.

4. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ с суммой 2. Положительные числа $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ таковы, что все выражения $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_{100}}{b_{100}}$ меньше 1000. Докажите, что сумма

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_{100}^2}{b_{100}}$$

меньше 2000.

5. Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11\ldots11}_{n}$ раз.

6. Четырехугольник $ABCD$ ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. Известно, что $AD = CD$. Пусть биссектриса угла ADB пересекает AC в точке M, а AB — в точке N. Докажите, что треугольник MAN равнобедренный.

7. Зрители называют фокуснику натуральное число $n > 2$. Затем Фокусник пишет на доске натуральное число $k > n$. После чего зрители пишут предыдущие n последовательных чисел $k-1, k-2, \ldots, k-n$ Далее Фокусник стирает с доски одно из чисел так, что все оставшиеся числа являются составными. Как он это делает?

8. Дан остроугольный треугольник ABC. Докажите, что можно построить три квадрата с центрами в точках A, B и C такие, что какие бы два из них не выбрали, существуют две прямые, на каждой из которых лежит по одной стороне каждого выбранного квадрата.