

**Олимпиада по математике**  
**«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»**

**11 класс, 2020 год**

1. В некотором регионе 60% работающих — бюджетники, и их зарплата в среднем на 20% ниже средней зарплаты по этому региону. На сколько процентов должна повыситься зарплата бюджетников, чтобы сравняться со средней зарплатой всех работающих?
2. Длины диагоналей граней  $ABCD$ ,  $ABB_1A_1$  и  $ADD_1A_1$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  выражаются различными целыми числами. Какой наименьшей может быть сумма этих чисел?
3. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 100. Можно любую пару чисел  $x, y$  заменять на  $xy - 29x - 29y + 870$ . Какое число останется после 99 таких операций?
4. Найдите множество значений выражения  $\frac{ac}{ab+ac+bc}$  при условии, что  $a, b$  и  $c$  — положительные числа, удовлетворяющие неравенствам  $a \leq b \leq c$ .
5. Для чисел  $x, y, z, t$  из интервала  $(0; \frac{\pi}{2})$  выполняется равенство

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + \cos 2t = 4(\cos x \cos y \cos z \cos t - \sin x \sin y \sin z \sin t).$$

Докажите, что сумма некоторых двух из чисел  $x, y, z, t$  равна сумме двух остальных.

6. Дан треугольник  $ABC$ ; точка  $K$  на стороне  $AB$  и точка  $L$  на стороне  $BC$  таковы, что  $AK = KL = LC$ . На луче  $CB$  отмечена точка  $M$ , для которой  $CM = AB$ , а на прямой  $AL$  — точка  $N$ , для которой  $MN \parallel AC$ . Докажите, что  $BN = AB$ .
7. Зная, что  $0,698 < \lg 5 < 0,699$ , определите, у скольких из чисел  $1, 5, 25, \dots, 5^n, \dots, 5^{100}$  десятичная запись начинается с единицы.
8. Каждый из 25 учеников 11 «А» класса дружит ровно с двумя учениками 11 «Б», а все ученики 11 «Б» имеют разные наборы друзей в 11 «А». Каким наибольшим может быть число учеников в 11 «Б»?