

Олимпиада по математике
«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

10 класс, 2020 год

1. В цеху работало несколько станков фирмы «Левша». После того как 5 станков были заменены на 5 станков фирмы «Инноватика» общая производительность всех станков цеха выросла на 25%. Если бы изначально 40% станков фирмы «Левша» заменили на такое же количество станков фирмы «Инноватика», то общая производительность выросла бы в 1,5 раза. Найдите количество станков в цеху, если станки одной и той же фирмы имеют одинаковую производительность.

2. Докажите, что для всех натуральных n число $n^6 - n^2$ делится на 10.

3. Последовательность действительных чисел a_n такова, что $a_{n+1} = a_n(a_n + 4) + 2$ для всех натуральных n . Найдите минимальное возможное значение числа a_{2020} .

4. Функция f такова, что для любого действительного числа x выполнено равенство

$$9f(f(x)) = 3f(x) + 8x.$$

Решите уравнение $f(x) = 0$.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через A , параллельна их линии центров и пересекает ω_1 и ω_2 вторично в точках C и D соответственно. Окружность ω_3 построена на CD как на диаметре и пересекает ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP , DQ и AB пересекаются в одной точке.

6. Найти все значения a , при которых корни x_1, x_2, x_3 многочлена $x^3 + 4x^2 + ax + a$ удовлетворяют равенству $(x_1 + 2)^3 + (x_2 + 2)^3 + (x_3 + 2)^3 = 0$.

7. Даны два подобных треугольника, стороны первого из которых соответственно в два раза больше высот второго. Найдите наибольшее возможное значение коэффициента подобия первого треугольника ко второму.

8. В классе 25 учащихся. Для них были куплены билеты на один ряд в кинотеатре, состоящий из 25 мест, пронумерованных от 1 до 25. Несмотря на то, что каждый школьник получил индивидуальный билет, они сели на места своего ряда случайным образом. Какова вероятность того, что у каждого школьника для номера места N , на которое он сел, и номера места M , указанного в билете, выполнено неравенство $M \geq N - 3$?