Олимпиада по математике
«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

10 класс, 2018 год

1. Пять различных по весу гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.

2. Даны 2018 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$, либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2017}x_{2018},$$

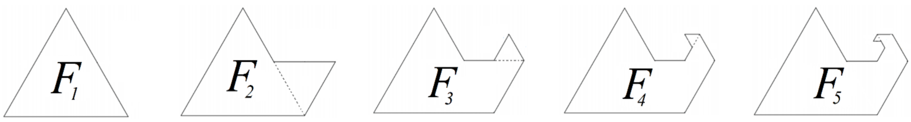
если известно, что она является целым числом.

3. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + |x+1| + \ldots + |x+2022|$.

4. Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

5. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

6. Дана бесконечная последовательность многоугольников F_1, F_2, F_3, F_4, … Фигура F_1 — это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $1/2$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $1/2$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.



Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

7. Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

8. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 2031$?