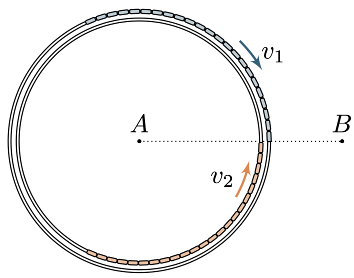
Олимпиада им. Дж. К. Максвелла

7 класс, заключительный этап, 2022/23 год

Задача 1. **Теория.** Периодическое движение — это движение, которое повторяется через равные интервалы времени. Минимальный интервал времени, в течение которого движение повторяется, называется периодом. Например, период секундной стрелки часов равен одной минуте, период минутной стрелки — это один час, период часовой стрелки — двенадцать часов.

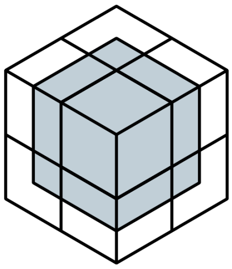
Задача. По кольцевой двухпутной железной дороге ездят без остановок два поезда. Оба пути имеют длину $L = 1$ км (отличиями в их длине можно пренебречь) и находятся на одном уровне. Первый поезд длиной $l_1 = 300$ м движется со скоростью $v_1 = 10$ м/с по часовой стрелке, второй поезд длиной $l_2 = 320$ м движется со скоростью $v_2 = 8$ м/с против часовой стрелки. В центре кольца стоит наблюдатель A. Наблюдатель B стоит за кругом, ограниченным железной дорогой так, что передние края обоих поездов пересекают отрезок AB одновременно (см. рис.). Наблюдатели не видят друг друга, только когда между ними находится хотя бы один поезд.



1. За какое время τ поезда проезжают мимо друг друга?
2. Чему равны периоды движения T_1 и T_2 первого и второго поезда соответственно?
3. Найдите период движения системы T, то есть минимальное время, через которое повторится ситуация, изображённая на рисунке.
4. В течение какой части α периода движения T наблюдатели видят друг друга?

1) $\tau = \frac{l_1+l_2}{v_1+v_2} \approx 34$ с; 2) $T_1 = \frac{L}{v_1} = 100$ с, $T_2 = 125$ с; 3) $T = 5T_1 = 4T_2 = 500$ с; 4) $\alpha = 0{,}48$ (см. диаграмму пересечений)

Задача 2. У теоретика Бага было восемь одинаковых кубиков с длиной ребра $2a$: семь сделаны из материала плотностью ρ_x, и один — из материала плотностью ρ_y ($\rho_y < \rho_x$). Баг склеил из них большой куб с ребром $4a$ и задал своему ученику задачу определить плотности всех кубиков с ребром $3a$, которые можно вырезать из склеенного куба так, чтобы они имели с ним одну общую вершину (пример вырезания такого кубика показан на рисунке серым цветом). Ученик, решая задачу, получил несколько ответов, которые записал в виде таблицы:



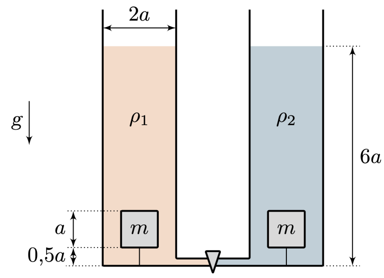
ρ_1, г/см^3	ρ_2, г/см^3	ρ_3, г/см^3	ρ_4, г/см^3
2,40	2,50	2,65	2,60
ρ_5, г/см^3	ρ_6, г/см^3	ρ_7, г/см^3	ρ_8, г/см^3
2,50	2,60	2,50	2,60

Проверив таблицу, Баг сказал, что все значения в ней, кроме одного, вычислены верно.

1. Определите какое из значений вычислено неверно и найдите это значение.
2. Определите плотности ρ_x и ρ_y.

1) ρ_1 найдена неверно, $\rho_1 = 2{,}30$ г/см^3; 2) $\rho_x = 2{,}70$ г/см^3, $\rho_y = 1{,}35$ г/см^3

Задача 3. Два одинаковых открытых сосуда квадратного сечения со стороной $2a$ с вертикальными стенками соединены в нижней части тонкой горизонтальной трубкой. На трубке установлен кран. Вначале кран закрыт, левый сосуд заполнен до уровня 6a жидкостью неизвестной плотности ρ_1, а правый — до такого же уровня жидкостью неизвестной плотности ρ_2. Ко дну каждого из сосудов прикреплены на лёгких нитях длины $0{,}5a$ одинаковые кубики с длиной ребра a, причём сила натяжения левой нити равна $3T$, а правой — T.

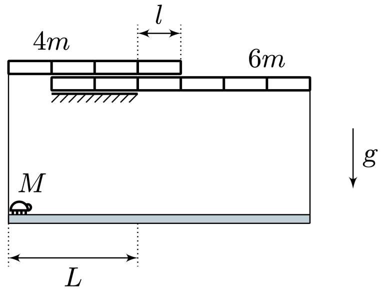


Кран открывают, и система приходит в равновесие. При этом жидкости не смешиваются и из сосудов не вытекают. В состоянии равновесия сила натяжения правой нити становится равной $2T$.

Определите плотности жидкостей ρ_1, ρ_2, а также массу кубика m, выразив их через известные величины: g, T и a.

$\rho_1 = \frac{47T}{7a^3g}$, $\rho_2 = \frac{33T}{7a^3g}$, $m = \frac{26T}{7g}$

Задача 4. На рисунке изображена система, состоящая из двух однородных балок с массами $4m$ и $6m$, разделённых штрихами на равные части, лёгкого стержня длиной $7l$, подвешенного к балкам на лёгких нитях, и небольшого жука, находящегося у левого края стержня. Система расположена на неподвижной горизонтальной опоре длиной $2l$. Нити вертикальны, балки и стержень горизонтальны.



1. При каких значениях массы M жука такое равновесие возможно?

2. Жук массой $M = M_1$ начинает медленно переползать в направлении правого края стержня. На какое расстояние L жук удалится от левого края стержня в момент, когда система выйдет из положения равновесия? Определите максимально возможное значение этого расстояния $L_{\max}$. При каком отношении масс $\alpha = M_1/m$ оно достигается?

1) $\frac{3}{2}m \leqslant M \leqslant 4m$; 2) $L = l\left(3 - \frac{2m}{M_1}\right)$; $L_{\max} = \frac{5}{2}l$ при $\alpha = 4$