

Межведомственная олимпиада по математике

11 класс, 2023 год

1. Найдите количество целых решений уравнения на отрезке $[1; 90]$:

$$\sin(\pi \cdot \log_2 x) + \cos(\pi \cdot \log_2 x) = 1.$$

4 решения

2. Решите уравнение в целых числах

$$12 \cdot 3^{x+y} = 3^x + 3^y.$$

(1-, 'z-), (z-, '1-)

3. а) Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$;
б) с помощью пункта а) найдите $f(x_0)$, где

$$f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x.$$

Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b — целые числа.

ε + ε^Λ

4. На листе клетчатой бумаги с размером клетки 1×1 изображен прямоугольник. Прямоугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам на некоторое количество маленьких прямоугольников. У каждого маленького прямоугольника длины сторон выражаются целыми числами, при этом длина хотя бы одной его стороны чётна. Докажите, что длина хотя бы стороны исходного прямоугольника также является чётным числом.

5. Существуют ли такие функции $f(x, y)$ и $g(x, z)$, что для любых действительных значений x, y, z выполняется равенство

$$f(x, y) - g(x, z) = |y - z|?$$

Ответ обоснуйте.

Таких функций не существует

6. В Кристоландии в тире действуют следующие правила. Перед началом стрельбы стрелок приобретает 100 патронов. На мишени нарисованы три концентрические окружности радиусов 3, 6 и 12 сантиметров. За попадание в круг, ограниченный первой из них, даётся 3 очка и 4 дополнительных патрона. За попадание в кольцевую область между первой и второй окружностями даётся 2 очка и 3 дополнительных патрона. За попадание в зону между второй и третьей окружностями даётся одно очко и 2 дополнительных патрона. Если стрелок не попал в мишень, то ни очков, ни дополнительных патронов он не получает. Считаем, что в границы кругов стрелок не попадает. Стрельба заканчивается, когда у стрелка не остаётся ни одного патрона. Юра пошёл в тир и завершил стрельбу, допустив 2023 промаха. Сколько очков набрал Юра?

1923

7. Обозначим $a = 3481$, $b = 4120$, $N = 26069$. Известно, что остаток от деления числа b^2 на N равен a . Найдите разложение числа N на простые множители.

691 · 131 = 69091

8. Из центра O сферы радиуса R проведены три луча, пересекающие сферу в точках A , B и C . Известно, что $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 60^\circ$. Найдите площадь части сферы, ограниченной плоскостями (AOB) , (AOC) и (BOC) .

$2R^2 \cdot (1 - \frac{\pi}{3} \cos 60^\circ)$