Межведомственная олимпиада по математике

9 класс, 2022 год

1. 100-значное число имеет вид $a = 1777\ldots76$ (посередине — 98 цифр 7). Число $\dfrac{1}{a}$ представили в виде бесконечной периодической дроби. Найдите её период. Ответ обоснуйте.

99

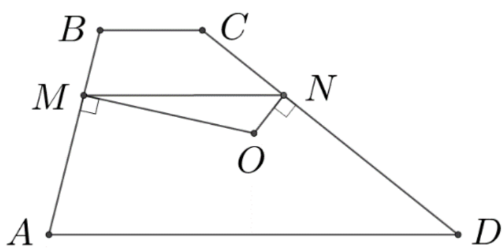
2. Есть 5 клеток. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр 1 или 2. Если получившееся в итоге 5-значное число будет делиться на 3, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 3 — то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обосновать.

Второй игрок

3. Пусть A — множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 + 2y^2$, где x, y — целые числа. Пусть B — множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 - 6xy + 11y^2$, где x, y — целые числа (например, $6 \in A$, т. к. $6 = 2^2 + 2 \cdot 1^2$). Равны ли множества A и B? Ответ обоснуйте.

Равны

4. Основания трапеции $ABCD$ связаны соотношением $AD = 4 \cdot BC$, сумма углов $\angle A + \angle D = 120^\circ$. На боковых сторонах выбраны точки M и N таким образом, что $CN : ND = BM : MA = 1 : 2$. Перпендикуляры, восстановленные в точках M и N к боковым сторонам трапеции, пересекаются в точке O. Найдите AD, если $AO = 1$.



$\sqrt{3}$

5. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{120}, если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру.

37

6. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех чисел от n до m включительно, здесь n и m — натуральные числа, причем $n > m \geqslant 1$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся на 2021.

7. Докажите, что система уравнений не имеет решений:

$$\begin{cases} x^3 + x + y + 1 = 0, \\ yx^2 + x + y = 0, \\ y^2 + y - x^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

8. Зафиксируем 10 натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{10}$ и обозначим через n их сумму

$$n = n_1 + \ldots + n_{10}.$$

Предположим теперь, что на доске в строчку записаны n чисел $a_1, \ldots, a_n$, каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1, \ldots, a_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{n_1+1}, \ldots, a_{n_1+n_2}}_{n_2}, \ldots, \underbrace{a_{n_1+\cdots+n_9+1}, \ldots, a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того какие числа $a_1, \ldots, a_n$ были взяты изначально, можно получить то или иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы $a_1, \ldots, a_n$, которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов $a_1, \ldots, a_n$ (где ненулевых групп будет четно) находится по формуле:

$$2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \ldots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$