

# Межведомственная олимпиада по математике

## 10 класс, 2022 год

1. 100-значное число имеет вид  $a = 1777\dots 76$  (посередине — 98 цифр 7). Число  $\frac{1}{a}$  представили в виде бесконечной периодической дроби. Найдите её период. Ответ обоснуйте.

66

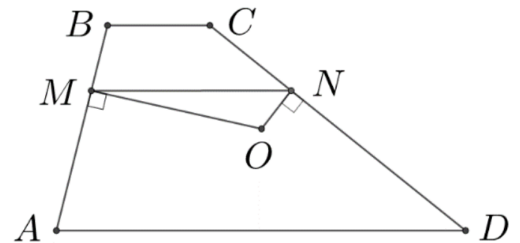
2. Есть 5 клеток. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр 1 или 2. Если получившееся в итоге 5-значное число будет делиться на 3, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 3 — то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обосновать.

Выиграл игрок

3. Пусть  $A$  — множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде  $x^2 + 2y^2$ , где  $x, y$  — целые числа. Пусть  $B$  — множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде  $x^2 - 6xy + 11y^2$ , где  $x, y$  — целые числа (например,  $6 \in A$ , т.к.  $6 = 2^2 + 2 \cdot 1^2$ ). Равны ли множества  $A$  и  $B$ ? Ответ обоснуйте.

Равны

4. Основания трапеции  $ABCD$  связаны соотношением  $AD = 4 \cdot BC$ , сумма углов  $\angle A + \angle D = 120^\circ$ . На боковых сторонах выбраны точки  $M$  и  $N$  таким образом, что  $CN : ND = BM : MA = 1 : 2$ . Перпендикуляры, восстановленные в точках  $M$  и  $N$  к боковым сторонам трапеции, пересекаются в точке  $O$ . Найдите  $AD$ , если  $AO = 1$ .



3/8

5. Найдите количество цифр в десятичной записи числа  $2^{120}$ , если известно, что десятичная записи числа  $2^{200}$  содержит 61 цифру.

37

6. Обозначим через  $a_{n,m}$  число, полученное записью подряд всех чисел от  $n$  до  $m$  включительно, здесь  $n$  и  $m$  — натуральные числа, причем  $n > m \geq 1$ . Так, например, число  $a_{4,2} = 432$ , а число  $a_{11,7} = 1110987$ . Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся на 2021.

7. Докажите, что система уравнений не имеет решений:

$$\begin{cases} x^3 + x + y + 1 = 0, \\ yx^2 + x + y = 0, \\ y^2 + y - x^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

8. Зафиксируем 10 натуральных чисел  $n_1, n_2, \dots, n_{10}$  и обозначим через  $n$  их сумму

$$n = n_1 + \dots + n_{10}.$$

Предположим теперь, что на доске в строчку записаны  $n$  чисел  $a_1, \dots, a_n$ , каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{n_1+1}, \dots, a_{n_1+n_2}}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_{n_1+\dots+n_9+1}, \dots, a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того какие числа  $a_1, \dots, a_n$  были взяты изначально, можно получить то или иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы  $a_1, \dots, a_n$ , которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов  $a_1, \dots, a_n$  (где ненулевых групп будет четно) находится по формуле:

$$2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$