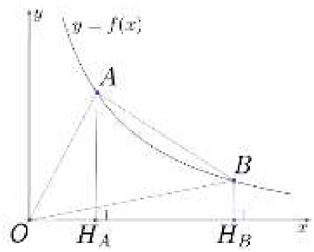
Межведомственная олимпиада по математике

11 класс, 2021 год

1. У Олега есть 1000 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы двадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы?

2^{19}

2. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O — начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте.



$f(x) = \frac{c}{x}$, $c > 0$

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен $45°$. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF.

2

4. Пусть x_1 и x_2 — наибольшие корни многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \quad \text{и} \quad g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

соответственно. Найдите $\dfrac{x_1}{x_2}$.

0,5

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + \dfrac{7}{2}x^2y + 2y^3 = 0, \\ 4x^2 + 7xy + 2y^3 = 0. \end{cases}$$

$(0; 0)$, $(2; -1)$, $\left(-\frac{11}{2}; -\frac{11}{2}\right)$

6. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения

$$\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \ldots}}}.$$

43

7. Известно, что число $\cos 6^\circ$ является корнем уравнения

$$32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0.$$

Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и т. п.)

Остальные четыре корня имеют вид $t = \cos\varphi$, где $\varphi \in \{78^\circ, 150^\circ, 222^\circ, 294^\circ\}$

8. Пусть A и B — некоторые числовые множества, а множество $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ представляет собой их сумму. (Другими словами, множество C состоит из всевозможных сумм элементов множеств A и B. Если, например, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, то $C = \{1, 2, 3, 4\}$.) Известно, что $C = \{0, 1, 2, \ldots, 2^{2828}\}$, а максимальный элемент множества A равен

$$\max A = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2020} + \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2020}.$$

Докажите или опровергните следующие утверждения:

1. и множество A, и множество B содержат конечное число членов;

2. все элементы множеств A и B — целые числа;

3. минимальный элемент множества B не превосходит числа $\left(2^{2828} - 2^{2525}\right)$.

Все утверждения верны