Межведомственная олимпиада по математике

11 класс, 2020 год

1. Восемь чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1, \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0, \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0, \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что $a_2b_3 = 7$. Найдите a_4b_4.

$\boxed{a_4b_4 = -6}$

2. Решите уравнение $2^x + 2^y = 6^t$ в целых числах.

$\boxed{(-1,-1,0),\ (1,2,1),\ (2,5,2)\ \text{(при условии } x \leqslant y)}$

3. Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры $1, 2$. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

$\boxed{\frac{4^{50}+2}{3}}$

4. Решите неравенство

$$2^{\log_2^2 x} - 12 \cdot x^{\log_{0,5} x} < 3 - \log_{3-x}\left(x^2 - 6x + 9\right).$$

$\boxed{x \in \left(2^{-\sqrt{2}}, 2\right) \cup \left(2, 2^{\sqrt{2}}\right)}$

5. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{2t}{1+t^2}} + \sqrt[3]{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = 1.$

$\boxed{t \in \{0, 1\}}$

6. Основанием пирамиды $TABCD$ является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Расстояния от точек A и B до плоскости TCD равны r_1 и r_2 соответственно. Площадь треугольника TCD равна S. Найдите объем пирамиды $TABCD$.

$\boxed{\frac{S(r_1+r_2)}{3}}$

7. Дан треугольник ABC. На стороне AC выбирают точку Q таким образом, чтобы длина отрезка MK, где M и K — основания перпендикуляров, опущенных из точки Q на стороны AB и AC соответственно, оказалась минимальной. При этом $QM = 1$, $QK = \sqrt{2}$, $\angle B = 45^\circ$. Найдите площадь треугольника ABC.

$\boxed{S_{ABC} = \frac{25}{6}}$

8. Найдите все неотрицательные целые числа a и b, удовлетворяющие равенству

$$a^2 + b^2 = 841 \cdot (ab + 1).$$

$\boxed{a_n = b_{n-1},\, b_n = k^2 b_{n-1} - a_{n-1},\, a_0 = 0,\, b_0 = k;\ \text{здесь } k = 29 \text{ (при условии } a \leqslant b,\ n \in \mathbb{N})}$