Межведомственная олимпиада по математике

10 класс, 2020 год

1. Восемь чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1, \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0, \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0, \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что $a_2b_3 = 7$. Найдите a_4b_4.

$\boxed{a_4b_4 = -6}$

2. Решите уравнение $2^x + 2^y = 6^t$ в целых числах.

$\boxed{(-1,-1,0),\ (1,2,1),\ (2,5,2)\ \text{(при условии } x \leqslant y)}$

3. Найдите площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты

$$A(0,0), \quad B(1424233, 2848467), \quad C(1424234, 2848469).$$

Ответ округлите до сотых.

$\boxed{0{,}50}$

4. Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры $1, 2$. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

$\boxed{\frac{4^{50}+2}{3}}$

5. На декартовой плоскости рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Укажите хотя бы одно значение R, при котором на такой окружности лежат ровно 32 целочисленные точки (точку называют целочисленной, если ее абсцисса и ордината — целые числа).

Указание. Натуральное число x представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда все простые числа (кроме 2), входящие в разложение числа x в нечетной степени, имеют вид $4k + 1$ для некоторых целых k. В частности, в виде суммы двух квадратов представимо любое простое число, дающее остаток 1 при делении на 4. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то это же верно и для их произведения.

$\boxed{\text{Например, } \sqrt{1105}}$

6. Решите уравнение

$$\sin^3 x + 6\cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$\boxed{x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}}$

7. В вершинах квадрата со стороной 4 расположены четыре города. Эти города надо соединить дорогами так, чтобы из любого города можно было по ним добраться в любой. Предложите хоть один вариант таких дорог, общей длиной **менее** 11.

Указание. При решении задачи может оказаться полезным следующее утверждение (которое допустимо использовать без доказательства). Пусть внутренние углы треугольника ABC меньше $120°$. Сумма расстояний $AT+BT+CT$ от точки T до вершин треугольника минимальна, если из точки T стороны треугольника видны под углом $120°$ (T — точка Торичелли треугольника). Если же один из углов треугольника больше или равен $120°$, то точкой минимума суммы расстояний будет вершина этого угла.

8. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка Q так, что $AQ : QC = 1 : 2$. Из точки Q опущены перпендикуляры QM и QK на стороны AB и BC соответственно. При этом $BM : MA = 4 : 1$, $BK = KC$. Найдите $MK : AC$.

$\boxed{MK : AC = \frac{2}{\sqrt{10}}}$