

Межведомственная олимпиада по математике

9 класс, 2018 год

1. Сравните числа

$$(10^{2017} + 10^{2016} + \dots + 10 + 1)^{2018} \quad \text{и} \quad (10^{2018} + 10^{2017} + \dots + 10 + 1)^{2017}.$$

Первое число больше второго

2. Найдите все четные натуральные числа n , у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{2}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12.)

{2, 4, 6, 8, 12}

3. Сколькими способами из первых n натуральных чисел $1, 2, \dots, n$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$ для $n \leq 4$; $\frac{n}{2}$ для $n > 4$

4. Из пункта A в пункт D , расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. Дорога из A в D проходит через пункты B и C . В пункте B навигатор показал, что ехать осталось 30 мин, и автомобилист тут же снизил скорость на 10 км/ч. В пункте C навигатор показал, что ехать осталось 20 км, и автомобилист сразу же второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D .

100 км/ч

5. Про натуральные числа a, b, c известно следующее:

- a^b делится на c ;
- b^c делится на a ;
- c^a делится на b .

Докажите, что $(a + b + c)^{a+b+c}$ делится на произведение abc .

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD угол DAB прямой. Известно, что на стороне CD существует единственная точка M такая, что угол BMA прямой. Докажите, что $BC = CM$ и $AD = MD$.

7. Известно, что существует натуральное число N такое, что

$$\left(\sqrt{3} - 1\right)^N = 4817152 - 2781184 \cdot \sqrt{3}.$$

Найдите N .

91

8. Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках A, B, C, D . Докажите, что сумма длин дуг $BA + DC$ больше суммы длин дуг $AD + CB$.