Межведомственная олимпиада по математике

11 класс, 2018 год

1. Решите уравнение $x^2 - 2x \cdot \sin(x \cdot y) + 1 = 0$.

$(\pm 1, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$

2. Натуральные числа от 1 до 100 записали подряд без пробелов. Затем, между некоторыми цифрами поместили знак плюс. (Например, $1234567 + 891011\ldots15 + 1617\ldots99100$.) Может ли получившаяся в результате сумма делиться на 111?

Нет

3. Сравните числа

$$\left(10^{2017} + 10^{2016} + \ldots + 10 + 1\right)^{2018} \quad \text{и} \quad \left(10^{2018} + 10^{2017} + \ldots + 10 + 1\right)^{2017}.$$

Первое число больше второго

4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 4. Известно, что для произвольной точки M на продолжении высоты пирамиды SH (точка S находится между точками M и H) углы MSA, MSB, MSC, ASB, ASC и BSC равны между собой. Построен шар радиуса 1 с центром в точке S. Найдите объём общей части пирамиды $SABC$ и шара (объём шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.)

$\pi \cdot \frac{7\sqrt{6}-9}{27}$

5. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число N такое, что произведение $9 \cdot 5^n \cdot N$ представляет собой **палиндром**, то есть число, десятичная запись которого справа налево и слева направо читается одинаково. Например, для $n = 1$ можно взять $N = 13$, так как $9 \cdot 5^1 \cdot 13 = 585$.

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + (y-13)^2} + \sqrt{(x-18)^2 + (y-4)^2} = 15, \\ (x-2a)^2 + (y-4a)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение?

$a = \frac{145}{44}$, $a = \frac{135}{44}$, $a \in \left(\frac{63}{20}, \frac{13}{4}\right)$

7. Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках A, B, C, D. Докажите, что сумма длин дуг $BA + DC$ больше суммы длин дуг $AD + CB$.

8. Известно, что для любого натурального числа n верна формула:

$$\cos(n\alpha) = 2^{n-1} \cdot (\cos\alpha)^n + a_{n-1} \cdot (\cos\alpha)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (\cos\alpha)^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot (\cos\alpha) + a_0.$$

Здесь a_k — целые числа, и $a_0 = 0$ при нечётном n. Докажите, что при $n \geqslant 4$ числа $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ и $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ иррациональны.