

Межведомственная олимпиада по математике

10 класс, 2018 год

1. Сравните числа

$$(10^{2017} + 10^{2016} + \dots + 10 + 1)^{2018} \quad \text{и} \quad (10^{2018} + 10^{2017} + \dots + 10 + 1)^{2017}.$$

Первое число больше второго

2. Найдите все кратные трем натуральные числа n , у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{3}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12.)

{18, 24}

3. Сколькими способами из первых n натуральных чисел $1, 2, \dots, n$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = q$ или $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$

4. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. В момент, когда навигатор показывал, что ехать осталось 30 мин, автомобилист первый раз снизил скорость на 10 км/ч, а в момент, когда навигатор показывал, что ехать осталось 20 км, автомобилист второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время и расстояние на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что автомобиль с пониженной скоростью двигался на 5 мин дольше, чем с дважды пониженной скоростью.

100 км/ч

5. Решите уравнение

$$\sin \frac{\pi n}{12} \cdot \sin \frac{\pi k}{12} \cdot \sin \frac{\pi m}{12} = \frac{1}{8}.$$

Здесь k, m, n — натуральные числа, не превосходящие 5.

(1; 2; 5), (1; 5; 2), (2; 1; 5), (2; 5; 1), (5; 1; 2), (5; 2; 1)

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD угол DAB прямой. Известно, что на стороне CD существует единственная точка M такая, что угол BMA прямой. Докажите, что $BC = CM$ и $AD = MD$.

7. Произведение положительных чисел a и b больше 1. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$ верно неравенство

$$(a + b)^n > a^n + b^n + 2^n - 2.$$

8. Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках A, B, C, D . Докажите, что сумма длин дуг $BA + DC$ больше суммы длин дуг $AD + CB$.