

Межведомственная олимпиада по математике

10 класс, 2017 год

1. Найдите все корни уравнения

$$\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\sin^3 x} = 4\sqrt{2},$$

лежащие на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

$\frac{\pi}{x}$

2. Докажите, что для любого целого числа N уравнение

$$10xy + 17xz + 27yz = N$$

имеет решение в целых числах.

3. Известно, что многочлен

$$f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4$$

имеет 4 различных действительных корня $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Найдите многочлен вида

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4,$$

имеющий корни $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\}$.

$$g(x) = x^4 - 40x^3 + 1216x^2 - 1216x + 64$$

4. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов — А, В и С. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида А содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках В — 20% раствор и в С — 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Какое наименьшее количество переливаний надо сделать, чтобы получить в ёмкости 20,17% раствор? Какое наибольшее количество пробирок вида С может быть при этом использовано?

Минимум 1000 переливаний; максимум 73 пробирки вида С

5. Найти сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$).

5035485

6. Окружность касается сторон угла в точках А и В. На окружности выбрана точка М. Расстояния от М до сторон угла равны 24 и 6. Найти расстояние от М до прямой АВ.

12

7. Докажите, что существует натуральное число N , делящееся нацело на 1009, сумма цифр которого равна 1009.

8. Имеются таблицы A и B , в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей A можно проделывать следующие действия:

1. прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число;
2. прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число.

(Например, если к первой строке таблицы A прибавить вторую строку, умноженную на 4, то получится таблица, изображенная на рисунке справа после слова «пример».) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей A , получить таблицу B ? Ответ обоснуйте.

Таблица A

1	0
0	2

Таблица B

0	2
3	0

Пример

1	8
0	2

Нельзя