

Межведомственная олимпиада по математике

10 класс, 2016 год

1. Лыжник спускается с вершины горы к её подножию за 9 минут, а сноубордист — за 7 минут. Спустившись, они тут же поднимаются вверх на подъёмнике, а затем сразу же спускаются вновь. В 12:00 они одновременно начали спуск с вершины. Впервые они встретились у подножия в 17:45. Определите время подъёма от подножия до вершины.

ЛЮНИМ 61

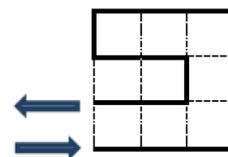
2. Решите уравнение $(x^2 + 3x + 6)(x^2 + 7x + 16) = 41$.

$$\frac{2}{92 \wedge 4 + 11 - \wedge 4 \mp 9 -}$$

3. Найдите натуральное число n , ближайшее к 1022, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна $2n - 1$.

719

4. На плоскости изображён квадрат $n \times n$ клеток. Вершины клеток будем называть узлами. Требуется в этом квадрате уложить трубу («тёплый пол») так, чтобы вход был в левом нижнем углу, а выход — в соседнем узле, и при этом труба прошла бы ровно один раз через каждый узел. Трубу разрешается укладывать только по границам клеток. На рисунке изображён пример укладки трубы в квадрате 3×3 . Докажите, что уложить трубу возможно при любом нечётном значении n и невозможно ни при каком чётном n .



5. Найдите наименьшее отличное от полного квадрата натуральное число N такое, что десятичная запись числа \sqrt{N} имеет вид:

$$A,00a_1a_2\dots a_n\dots,$$

где A — целая часть числа \sqrt{N} ; $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — цифры от 0 до 9.

1092

6. Докажите, что для любого прямоугольного треугольника с длинами катетов a, b , гипотенузой c и углами α, β (α напротив стороны a , β — напротив b) выполняется равенство

$$a^2 - 2ac \cos(60^\circ + \beta) = b^2 - 2bc \cos(60^\circ + \alpha).$$

7. Запишем подряд все натуральные числа, кратные девяти:

$$9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, \dots$$

У каждого из этих чисел подсчитаем сумму цифр. В результате получим последовательность:

$$9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, \dots$$

Найдите сумму первых 550 членов этой последовательности.

8508

8. Найдите три каких-нибудь натуральных числа a , b , c , удовлетворяющих равенству

$$a^3 + b^{2016} = c^5.$$

Например, $a = 2^{2688}$, $b = 2^4$, $c = 2^{1613}$