Межведомственная олимпиада по математике

9 класс, 2015 год

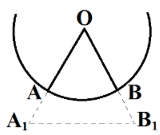
1. Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

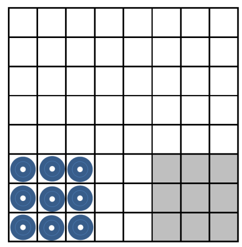
2

2. Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен $60°$. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1. Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)



Длина отрезка больше длины дуги

3. На доске 8×8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.



Нельзя

4. Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство

$$\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right].$$

Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[3{,}7] = 3$.)

5. Уравнения

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 6 = 0$$

имеют два общих корня. Найдите их.

$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

6. Сколько существует пар натуральных чисел (a, b),

$$1 \leqslant a \leqslant 10, \quad 1 \leqslant b \leqslant 10, \quad a > b,$$

для которых число $a^{2015} + b^{2015}$ делится нацело на число $a - b$?

25 пар

7. Числа a, b удовлетворяют равенствам

$$a^3 - 3a^2 + 5a = 1 \quad \text{и} \quad b^3 - 3b^2 + 5b = 5.$$

Найдите $a + b$.

$\boxed{2}$

8. Имеется n целых чисел $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую **перестановку** $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Из исходного набора чисел $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$ и этой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ по правилу:

$$a_1 = r_n(0 + i_1), a_2 = r_n(1 + i_2), \ldots, a_n = r_n\big((n-1) + i_n\big),$$

где $r_n(m)$ — остаток от деления числа m на число n. (Например, пусть $n = 3$. Тогда, из исходного набора $(0, 1, 2)$ и перестановки $(i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 0)$ получится набор $(a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 2)$, т. к. $r_3\,(0+1) = 1, r_3\,(1+2) = 0, r_3\,(2+0) = 2$.)

1. При $n = 5$ приведите пример такой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_5)$, что в соответствующем наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$ все числа различны.

2. Докажите, что, если $n = 6$, то какую бы перестановку $(i_1, i_2, \ldots, i_6)$ мы ни взяли, в наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ обязательно встретятся одинаковые числа.

1) например, $(i_1, i_2, \ldots, i_5) = (3, 4, 0, 1, 2)$