Межведомственная олимпиада по математике

11 класс, 2015 год

1. Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m, больших единицы, числа $m, f(m), f\big(f(m)\big)$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a, b, c называют **попарно взаимно простыми**, если каждое из них больше 1, и никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7, 8, 15 попарно взаимно просты, а числа 5, 8, 15 — нет.)

2. Даны три числа a, b, c такие, что

$$a + b + c = 1 \quad \text{и} \quad a, b, c \geqslant 0.$$

Докажите, что

$$a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 \leqslant \frac{4}{9}.$$

3. Уравнения

$$x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x - 6 = 0$$

имеют два общих корня. Найдите их.

$\boxed{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}}$

4. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что

$$n > 2015 \quad \text{и} \quad \left[\sqrt{9n+2}\right] \neq \left[\sqrt{9n+4}\right].$$

Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[3{,}7] = 3$.)

$\boxed{2085}$

5. Имеется n целых чисел $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую **перестановку** $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Из исходного набора чисел $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$ и этой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ по правилу:

$$a_1 = r_n(0 + i_1), a_2 = r_n(1 + i_2), \ldots, a_n = r_n\big((n-1) + i_n\big),$$

где $r_n(m)$ — остаток от деления числа m на число n. (Например, пусть $n = 3$. Тогда, из исходного набора $(0, 1, 2)$ и перестановки $(i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 0)$ получится набор $(a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 2)$, т. к. $r_3\,(0+1) = 1, r_3\,(1+2) = 0, r_3\,(2+0) = 2$.)

1. При $n = 9$ приведите пример такой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_9)$, что в соответствующем наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_9)$ все числа различны.

2. Докажите, что, если $n = 10$, то какую бы перестановку $(i_1, i_2, \ldots, i_{10})$ мы ни взяли, в наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ обязательно встретятся одинаковые числа.

1) например, $(i_1, i_2, \ldots, i_9) = (1,2,3,4,5,6,7,8,0)$

6. Дно прямоугольного ящика заложили плитками двух типов так, что всё дно ими покрыто, и ни одна из плиток даже частично не накрывает другую.

После транспортировки одна из плиток первого типа оказалась повреждённой, и её заменили плиткой второго типа. Могло ли так оказаться, что все плитки снова удалось уложить в ящик так, что дно оказалось вновь полностью покрытым? Ответ обоснуйте.

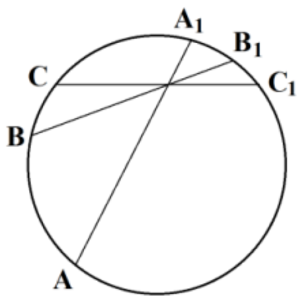
Не могло

7. Найдите значение выражения $a^4 + b^4 + c^4$, если известно, что числа a, b, c удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} a + b + c = 4, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9, \\ a^3 + b^3 + c^3 = 19. \end{cases}$$

81/2

8. В окружности три хорды AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Угловые меры дуг AC_1, AB, CA_1 и A_1B_1 равны соответственно 150°, 30°, 60° и 30°. Найдите угловую меру дуги B_1C_1.



60°