

Межведомственная олимпиада по математике

10 класс, 2015 год

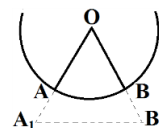
1. Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

806581751709438785716606368564037669752895054408832778x400000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

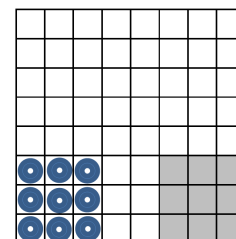
2

2. Дан круговой сектор AOB . Угол AOB равен 60° . Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1 . Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB ? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)



Длина отрезка больше длины дуги

3. На доске 8×8 клеток расположены 9 шахек. Перемещения шахек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шахки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шахки. Можно ли такими ходами переместить шахки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.



Нет

4. Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство

$$\left[\sqrt{4n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+3} \right].$$

Здесь скобки $[]$ обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x . Например, $[3,7] = 3$.)

5. Уравнения

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 6 = 0$$

имеют два общих корня. Найдите их.

$\frac{2}{-1 \pm \sqrt{13}}$

6. Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m , больших единицы, числа $m, f(m), f(f(m))$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a, b, c называют **попарно взаимно простыми**, если каждое из них больше 1, и никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7, 8, 15 попарно взаимно просты, а числа 5, 8, 15 — нет.)

7. Докажите неравенство

$$a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 \leq \frac{4}{9},$$

если известно, что a, b, c — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $a + b + c = 1$.

8. В классе 10 учеников. Из них требуется сформировать две команды (одну для уборки актового зала, вторую — для работы на пришкольном участке). При этом:

- 1) количество людей в командах может быть различным (но отличным от нуля),
- 2) каждый ученик может быть членом только одной команды или не входить в эти команды вовсе.

Сколькими способами это можно сделать?

1 + 012 · 2 - 012
