Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2008 год, вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{7-\sqrt{6}\operatorname{tg}x}+\sqrt{7}\cos x=0.$$

$x=\pi+2\pi k,\ x=\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{6}}{7}+2\pi k,\ x=\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{6}}{7}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=0,\\ x^2-y^2-7=0.\end{cases}$$

$\left(-\frac{43}{12};\frac{29}{12}\right),\ (4;-3),\ \left(-\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right)$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{(x+10)}\left(x^2-2x-8\right)}+\sqrt{\log_{(x^2-2x-8)}\left(x+10\right)^2}\leqslant 1+\sqrt{2}.$$

$-\frac{54}{11}\leqslant x\leqslant -3,\ x\geqslant 6$

4. Высота равнобедренной трапеции $ABCD$ равна 16, а её диагонали пересекаются в точке O. Окружность радиуса 3 с центром в точке O касается меньшего основания BC и боковой стороны CD трапеции. Найти основания трапеции.

$BC=4,\ AD=\frac{52}{3}$

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|ax^2+3\right|=|2ax|+|3a|$$

имеет хотя бы одно действительное решение.

$a<0,\ a\geqslant\frac{3}{4}$

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB=1$, $BC=2$. Пусть N — середина SB, M — середина SC, причём $BN=MC=3MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найти объём пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

$R_{min}=\frac{18}{\sqrt{35}},\ V=\frac{35}{51}\sqrt{\frac{1121}{35}}$