# Московский физико-технический институт

## Письменный экзамен по математике, 2008 год, вариант 2

**1.** Решить неравенство

$$\log_{\left(\frac{2-x}{1-x}\right)}(4-x) \leqslant 2.$$

$\boxed{0 \leqslant x < 1,\ 2 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

**2.** Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x}{|\sin 2x|} = \frac{3}{4}.$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}}$

**3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{\dfrac{x}{x+y}} = \dfrac{42}{x+y}, \\ xy - x = 16. \end{cases}$$

$\boxed{(4;5),\ \left(-\frac{1+\sqrt{133}}{2};\ \frac{41-8\sqrt{133}}{33}\right)}$

**4.** В треугольнике $ABC$ медиана $BM = 2$, угол $ABM$ равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, угол $CBM$ равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Найти стороны $AB$, $BC$ и биссектрису $BE$ треугольника $ABC$.

$\boxed{AB = \frac{4}{\sqrt{13}},\ BC = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{13}},\ BE = \frac{8\sqrt{20+2\sqrt{2}}}{7\sqrt{13}}}$

**5.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y^4 - 2y^2 = \ln x, \\ 2\operatorname{arctg} x + \arcsin y = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(1;-1)}$

**6.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера $\omega$ радиуса $\frac{15}{14}$ с центром $O$ касается рёбер $AS$, $BS$, $AD$, $BC$ пирамиды $SABCD$ соответственно в точках $K$, $L$, $M$, $N$, пересекает ребро $AB$ в точках $P$ и $Q$ и касается грани $CDS$. Известно, что прямая $SO$ перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает её в точке $H$, $\frac{AB}{PQ} = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $\frac{AS}{LS} = \frac{3}{2}$. Найти $\angle SAB$, $\angle SBH$, высоту пирамиды и её объём.

$\boxed{\arccos\frac{4}{9},\ \arccos\frac{5}{9},\ h = 2,\ V = \frac{64}{21}}$