Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2008 год, вариант 1

1. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{x^2+2x-3}} \geqslant \frac{1}{4-x}.$$

$\boxed{x<-3,\ 1<x\leqslant \frac{19}{10},\ x>4}$

2. Решить уравнение

$$\frac{4\cos^2 2x\cos 4x + 3\cos 2x + \cos 6x}{\cos 3x} = 0.$$

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}}$

3. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 = x^4 + x, \\ y = \dfrac{2x}{y} - 5x^2. \end{cases}$$

$\boxed{\left(-\frac{3^{2/3}}{7^{1/3}};\ -\frac{3^{1/3}}{7^{2/3}}\right),\ \left(\frac{1}{7^{1/3}};\ \frac{2}{7^{2/3}}\right)}$

4. Параллелограмм $ABCD$ имеет площадь 4. Окружность с центром в точке O, расположенной на отрезке AD, касается отрезков AB, BC и прямой CD в точках M, N и K соответственно. Найти радиус этой окружности и стороны параллелограмма $ABCD$, если $\frac{CK}{BM} = 3$.

$\boxed{R=\sqrt[4]{3},\ AB=\frac{2}{\sqrt[4]{3}},\ AD=\frac{4}{\sqrt[4]{3}}}$

5. Найти все пары вещественных чисел (x, y), удовлетворяющие неравенству

$$\log_{3^x+2^{-x}}\left(3-\cos 4x+\sin\frac{3y}{2}\right) \leqslant \log_{\left(\left|\cos\frac{y}{3}\right|+\left|\sin\frac{y}{3}\right|\right)}\left(|\sin 3x\cos 2y|\right).$$

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ y=\pi+12\pi s \text{ или } y=5\pi+12\pi s,\ k\in\mathbb{Z},\ s\in\mathbb{Z}}$

6. На основании $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ расположена точка O. Сфера с центром в точке O касается прямых SA, SB, SC, SD в точках A, B, K, L соответственно. Известно, что $AB = KL = 2\sqrt{5}$, $AL = 2$, $BK = 6$, а отрезок SO составляет с плоскостью $ABCD$ угол $\arccos\frac{2}{3}$. Найти длины отрезков AK, OS и SD.

$\boxed{AK=4\sqrt{2},\ OS=7,\ SD=\frac{(35)^{3/2}}{27}}$