Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2007 год, вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + 2x + 3y = 2, \\ 2x^2y + 3xy^2 + 12x + 18y = 16. \end{cases}$$

$\boxed{(-1; 2),\ (3; -\frac{3}{2})}$

2. Решить неравенство

$$\log_{(x-1)^4}(4-x)^2 + \log_{(1-x)^2}(x+1) \leqslant 1.$$

$\boxed{-1 < x \leqslant -\frac{1}{2},\ 0 < x < 1,\ 1 < x < 2,\ 3 \leqslant x < 4,\ x > 4}$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\cos^2 x + \pi}{4\cos^6 x + 1}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4\cos^6 x + 1}\right) = 0.$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

4. Окружность касается стороны AD четырёхугольника $ABCD$ в точке D, а стороны BC — в её середине M. Диагональ AC пересекает окружность в точках K и L ($AK < AL$). Известно, что $AK = 5$, $KL = 4$, $LC = 1$. Лучи AD и BC пересекаются в точке S, причём $\angle ASB = 120°$. Найти радиус окружности и площадь $ABCD$.

$\boxed{R = 4\sqrt{5} - \sqrt{15},\ S = \frac{50-5\sqrt{3}}{2}}$

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{1}{2}(\cos x)^{\frac{2}{3}} + (\sin x)^{\frac{2}{3}} = a$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\boxed{\frac{1}{2} \leqslant a < 1 \text{ и } a = \frac{1}{2}\left(1 + 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}$

6. В пирамиде $ABCD$ грани ABC и ADC являются равнобедренными треугольниками с общим основанием AC. Сфера радиуса R с центром в точке O, лежащей на грани ABC, касается всех рёбер пирамиды $ABCD$. Найти длины отрезков, на которые точки касания сферы делят рёбра пирамиды, и объём пирамиды $ABCD$, если угол ABC равен 2α. Найти значение угла ABC, при котором объём пирамиды $ABCD$ будет наименьшим. Найти это наименьшее значение объёма пирамиды $ABCD$.

$\boxed{a = R\operatorname{ctg}\alpha,\ b = \frac{R\cos\alpha}{1-\sin\alpha},\ c = \frac{R\cos\alpha}{2-\sin\alpha},\ v = \frac{2R^3}{3}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(2-\sin\alpha)\sin\alpha};\ \frac{\pi}{3},\ 2R^3}$