# Московский физико-технический институт

## Письменный экзамен по математике, 2007 год, вариант 2

**1.** Решить уравнение

$$2\log_3\left(x^2-4\right)+3\sqrt{\log_3(x+2)^2}-\log_3(x-2)^2=4.$$

$\boxed{x=-2-\sqrt{3}}$

**2.** Решить уравнение

$$\frac{\cos 9x-2\cos 6x+1}{\cos 3x-1}=\left|\cos 3x\right|.$$

$\boxed{x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}}$

**3.** Решить неравенство

$$\frac{\left(\sqrt{x+3}+x-3\right)\left(\sqrt{4x+5}+x-4\right)}{\sqrt{4+4x-x^2-x^3}}\leqslant 0.$$

$\boxed{x=1}$

**4.** Окружность $\omega$ с центром в точке $O$ на стороне $AC$ треугольника $ABC$ касается сторон $AB$ и $BC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Известно, что $AD=2CE$, а угол $DOE$ равен $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$. Найти углы треугольника $ABC$ и отношение его площади к площади круга, ограниченного окружностью $\omega$.

$\boxed{\angle ABC=\pi-\operatorname{arctg}3,\ \angle ACB=\frac{\pi}{4},\ \angle BAC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2},\ \frac{S}{\pi R^2}=\frac{2\sqrt{10}+7}{6\pi}}$

**5.** Найти все значения параметра $a$, при которых существует ровно две пары действительных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases}\left(x+y^2-1\right)\left(y-\sqrt{6}|x|\right)=0,\\ 2ay+x=1+a^2.\end{cases}$$

$\boxed{a=\sqrt{\frac{2}{3}},\ a=\sqrt{\frac{3}{2}},\ -\frac{1}{2\sqrt{6}}<a\leqslant\frac{1}{2\sqrt{6}}}$

**6.** Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два шара $\omega_1$ и $\omega_2$, касающиеся друг друга внешним образом; кроме того, шар $\omega_1$ касается граней $ABCD$, $ABB_1A_1$, $ADD_1A_1$, а шар $\omega_2$ касается граней $A_1B_1C_1D_1$, $BCC_1B_1$, $CDD_1C_1$. Известно, что $AB=6-\sqrt{2}$, $A_1D_1=6+\sqrt{2}$, $CC_1=6$. Найти расстояние между центрами шаров $\omega_1$ и $\omega_2$. Найти наибольший и наименьший суммарный объём шаров.

$\boxed{d=4,\ v_{\min}=\frac{64\pi}{3},\ v_{\max}=\left(\frac{136}{3}-16\sqrt{2}\right)\pi}$