Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2007 год, вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_{11-x^2}\left(2^x-6+3\cdot 2^{2-x}\right)=\log_{x-1}\left(2^x-6+3\cdot 2^{2-x}\right).$$

$\boxed{x_1=\log_2 3,\ x_2=3}$

2. Решить уравнение

$$\sin 2x = 2\sin^3|x| + \sin 2x\cos x.$$

$\boxed{x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ n\leqslant -1}$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3-2x}{1+2x}}+\frac{\sqrt{1+2x}}{2\sqrt{3-2x}-\sqrt{2}}\geqslant 0.$$

$\boxed{-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{4}}$

4. Окружности ω_1 и ω_2 лежат внутри треугольника ABC, в котором $AB=BC=l$, $AC=2$, а радиус ω_1 в два раза больше радиуса ω_2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом, причём ω_1 касается сторон AB и AC, а ω_2 — сторон BC и AC треугольника ABC. Найти радиус окружности ω_1, если $l=6$. Найти все значения l, при которых существуют указанные окружности.

$\boxed{R_1=\frac{20}{3\sqrt{35}+10\sqrt{2}},\ l\geqslant\frac{9}{7}}$

5. Найти все значения параметра a, при которых наибольшее значение величины x^2+y на множестве пар действительных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам $y\leqslant\sqrt{1-x^2}$ и $y+|x-a|\leqslant 1$, будет максимально возможным. Найти это максимально возможное значение.

$\boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\leqslant|a|\leqslant\frac{\sqrt{3}+1}{2};\ \frac{5}{4}}$

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ четыре числа — длины рёбер и диагонали AC_1 — образуют арифметическую прогрессию с положительной разностью d, причём $AA_1 < AB < BC$. Две внешне касающиеся друг друга сферы одинакового неизвестного радиуса R расположены так, что их центры лежат внутри параллелепипеда, причём первая сфера касается граней ABB_1A_1, ADD_1A_1, $ABCD$, а вторая — граней BCC_1B_1, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$. Найти:

а) длины рёбер параллелепипеда,

б) угол между прямыми CD_1 и AC_1,

в) радиус R.

а) $AA_1 = d\sqrt{2}$, $AB = d\left(\sqrt{2}+1\right)$; б) $\arccos \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{79+52\sqrt{2}}}$; в) $R = d\left(\frac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}\right)$