Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2006 год, вариант 4

1. Решить неравенство

$$\sqrt{\sqrt{2x+\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}} \geqslant x.$$

$\boxed{-\frac{9}{8} \leqslant x \leqslant 2}$

2. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{3}\cos 3x + \sin 2x\right)^2 = 7 + 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$\boxed{x = \frac{7\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8y\log_y x + (y-4x)\log_x y = 16x + 2y, \\ 16x\log_y x + (y-7x)\log_x y = 8x. \end{cases}$$

$\boxed{(2;16),\ (64;256)}$

4. Найти острые углы и площадь прямоугольного треугольника, если угол между медианой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла треугольника, равен α, а длина биссектрисы равна l.

$\boxed{\frac{\pi}{4}-\alpha,\ \frac{\pi}{4}+\alpha;\ S = \frac{l^2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}}$

5. Среди первых ста членов арифметической прогрессии с положительной разностью есть числа $\frac{13}{6}$, $\frac{75}{2}$ и $\frac{389}{6}$. Найти разность этой прогрессии. Найти наименьшее из возможных значений первого члена этой прогрессии.

$\boxed{d = \frac{2}{3},\ \min a_1 = -\frac{7}{6}}$

6. Внутри конуса с вершиной A и высотой 8 расположены сфера S_1 с центром O_1 радиуса 1 и сфера S_2 с центром O_2 радиуса $\frac{1}{4}$, причём $O_1O_2 = \frac{3}{2}$. Сфера S_1 касается плоскости основания конуса в его центре O. Обе сферы S_1 и S_2 касаются образующей конуса AB в точках A_1 и A_2 соответственно. Прямые O_1O_2 и AB пересекаются в точке L. Плоскость Π касается обеих сфер и пересекает отрезок A_1A_2 в его середине M. Найти длины отрезков A_1A_2 и O_2L, а также расстояния от точек L и A до плоскости Π.

$\boxed{A_1A_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4},\ O_2L = \frac{1}{2},\ \rho(L,\Pi) = \frac{2}{3},\ \rho(A,\Pi) = \frac{58}{15}}$