

Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2006 год, вариант 3

1. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} 4x \operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} 4x - \operatorname{ctg} 3x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni x \text{ ' } \mathbb{Z} \ni u \text{ ' } \operatorname{tg} \neq u \text{ ' } \frac{x}{u} = x$$

2. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2xy + \frac{3}{z} + 3 = 0, \\ yz + \frac{4}{x} - 2 = 0, \\ xz + \frac{2}{y} + 2 = 0. \end{cases}$$

$$(\mathbb{R} : \mathbb{Z} : \mathbb{R} -)$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{|x|}}} \leq \log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3).$$

$$\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}} < x \text{ ' } \mathbb{I} - > x$$

4. В треугольнике ABC угол ACB прямой, $AB = 21$. Биссектриса угла BAC и медиана BP пересекаются в точке O . Окружность радиуса 3 с центром O пересекает сторону AB в точках K и L (K лежит между A и L), пересекает сторону AC в точках M и N (M лежит между A и N) и касается стороны BC в точке T . Найти AC , угол KON , AM .

$$\mathbb{R} = \operatorname{tg} \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}} \operatorname{tg} \cos \alpha - \nu = \operatorname{tg} \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}} \operatorname{tg} \alpha - \nu = \operatorname{tg} \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}} \operatorname{tg} \alpha - \nu$$

5. Найти все значения параметра b , при которых для любого значения параметра a существует тройка действительных чисел (x, y, z) , удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} ax + y = z + b, \\ 4x + ay = z^2. \end{cases}$$

$$\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}} \geq q \geq \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{I}} -$$

6. В пирамиде $SABC$ каждый из углов ASB и ASC равен $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$, угол BSC прямой, ребро SB равно a . Центр сферы, вписанной в пирамиду $SABC$, лежит на высоте SD . Найти SA , SD и радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

$$\frac{L^2 + L^2}{\varepsilon^2 \wedge v} = \mathcal{H} \left(\frac{L}{\varepsilon} \right) \wedge v = OS \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon \wedge v} \right) = VS$$