# Московский физико-технический институт

## Письменный экзамен по математике, 2006 год, вариант 2

**1.** Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2y^5} = 4\left(y^2 - x^2\right), \\ 5\sqrt[3]{x^4y} = x^2 + y^2. \end{cases}$$

$\boxed{(0;0),\ (2;4),\ (-2;4)}$

**2.** Решить уравнение

$$\sin 3x\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$\boxed{x = \pi k,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$

**3.** Решить неравенство

$$\frac{2}{\log_{1+x}\left(6 + 4x - 2x^2\right)} \leqslant \frac{1}{2 - \log_{6-2x}(1+x)}.$$

$\boxed{1 - \sqrt{\frac{7}{2}} < x < 0,\ 0 < x \leqslant 1,\ \frac{5}{3} \leqslant x < \frac{25-\sqrt{65}}{8},\ 1 + \sqrt{\frac{7}{2}} < x < 3}$

**4.** Треугольник $ABC$ вписан в окружность $O$ радиуса $R$, точки $K$, $L$ и $M$ — середины отрезков $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно. Окружности $O_1$, $O_2$ и $O_3$ проведены через точки $K$, $L$ и $M$ соответственно, касаются окружности $O$ и каждая имеет с треугольником $ABC$ единственную общую точку. Найти радиус окружности $O_3$, если радиусы окружностей $O_1$ и $O_2$ равны $\frac{1}{3}R$ и $\frac{1}{4}R$ соответственно.

$\boxed{\frac{7-2\sqrt{6}}{12}R}$

**5.** Для каждого значения параметра $a \in [0, \pi]$ найти максимальное значение $g(a)$ функции

$$f(x, y) = x(x+2) + y(y-4)$$

на множестве точек $(x, y)$ таких, что $x^2 + y^2 \leqslant 2\left(x\cos a + y\sin a\right)$. Найти значения параметра $a \in [0, \pi]$, при которых $g(a)$ принимает наименьшее значение.

$\boxed{g(a) = \left(\sqrt{6 + 2\cos a - 4\sin a} + 1\right)^2 - 5;\ \pi - \operatorname{arctg} 2}$

**6.** В треугольной пирамиде $ABCD$ сфера касается граней $ACD$ и $BCD$ в точках $B_1$ и $A_1$, являющихся основаниями высот пирамиды, и пересекает ребро $AB$ в точках $K$ и $L$. Известно, что $AB = \sqrt{10}$, $KL = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $BC = \sqrt{\frac{35}{2}}$, $AD = 5$. Найти расстояние между рёбрами $AB$ и $CD$, радиус окружности, высекаемой на сфере плоскостью $ABC$, и объём пирамиды $ABCD$.

$\boxed{\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{25}{2\sqrt{2}}}$