Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2006 год, вариант 1

1. Решить уравнение

$$8\cos^2 x\sin x + \cos x = \cos 3x + 6\sin x.$$

$x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{8x^3 - 6x + 2}}{2x+1} \leqslant \sqrt{2x+3}.$$

$-1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2},\ x \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}(1+y) = 2x + 3y, \\ x^2 + 2xy = x - y^2. \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{9}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

4. Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности. Известно, что $AB = BC$, $CD = DE$, $AE = 6$, $AC = 8$, $CE = 7$. Найти радиус окружности, вписанной в пятиугольник, и угол BCD.

$r = \frac{11}{\sqrt{15}},\ \angle BCD = 2\arcsin\frac{11}{16}$

5. При каких значениях параметра t система уравнений

$$\begin{cases} (x - 1 - 4t)^2 + (y - 1 - 3t)^2 = 9t^2, \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

$t = 1,\ t = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4}$

6. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Сфера радиуса 3 с центром в плоскости AA_1D_1D касается плоскостей $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и прямых AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Известно, что $A_1D_1 = 7$, $BC = 5$. Найти:

1. угол между прямыми AD и BB_1;
2. двугранный угол между гранями BB_1C_1C и CC_1D_1D;
3. объём призмы.

1) $\arcsin\frac{6}{7}$; 2) $\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{6}$; 3) $\frac{216\sqrt{6}}{7}$