Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2005 год, вариант 3

1. Решить неравенство

$$\frac{|x^2-3x+2|+|2x+1|-5}{\sqrt{4x^3+3x^2+4x+3}} \leqslant 0.$$

$\boxed{\frac{5-\sqrt{41}}{2} \leqslant x \leqslant 2}$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos^5 x-\sin^5 x}{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{\cos^5 x+\sin^5 x}{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{9}{8}+\cos 2x.$$

$\boxed{x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE и CD. Найти длины отрезков CD, CE, DE и расстояние между центрами окружностей, вписанной в треугольник ABC и описанной около треугольника ABC, если $AC=2$, $BC=4$, $\angle ACB=\arccos\frac{11}{16}$.

$\boxed{CD=\sqrt{6},\ CE=\frac{8}{5},\ DE=\frac{\sqrt{34}}{5},\ \rho=2\sqrt{\frac{2}{5}}}$

4. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 6, двугранный угол между боковыми гранями пирамиды равен $\arccos\frac{7}{32}$. Точки A_1 и B_1 — середины рёбер AD и BD соответственно, BC_1 — высота в треугольнике DBC. Найти:

1. угол между прямыми AB и B_1C_1;
2. площадь треугольника $A_1B_1C_1$;
3. расстояние от точки B до плоскости $A_1B_1C_1$;
4. радиус вписанного в пирамиду $A_1B_1C_1D$ шара.

$\boxed{1)\ \arccos\frac{3}{5};\ 2)\ 3;\ 3)\ \frac{21\sqrt{39}}{100};\ 4)\ \frac{7\sqrt{39}}{104}}$

5. Найти значения параметра a, при которых множество решений (x,y) системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+x+(y-a)^2 \leqslant 11, \\ x+a+y^2 \leqslant 0 \end{cases}$$

содержит отрезок с концами в точках $(1,0)$ и $(1,1)$.

$\boxed{a=-2}$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{4} + \dfrac{xz}{9} - \dfrac{yz}{25} = 1 + 2\ln\dfrac{5x}{6}, \\ \dfrac{xy}{4} + \dfrac{yz}{25} - \dfrac{xz}{9} = 1 + 2\ln\dfrac{3y}{10}, \\ \dfrac{yz}{25} + \dfrac{xz}{9} - \dfrac{xy}{4} = 1 + 2\ln\dfrac{2z}{15}. \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\tfrac{6}{5}, \tfrac{10}{3}, \tfrac{15}{2}\right)}$$