

Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2005 год, вариант 1

1. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{xy} = \frac{x-y}{x^2y^2} + \frac{xy}{x-y}, \\ \frac{x-y}{xy} \sqrt{x-y} = 2 - xy. \end{cases}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}, \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} \right), \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}, \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1} \right)$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{(1-x)} \left(x^2 + \frac{1}{2} \right)} < \log_{(x-1)^2} \left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - x^3 \right).$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{1} \geq x > \frac{\sqrt[3]{2}}{1-\sqrt[3]{2}}, \frac{\sqrt[3]{2}}{1-\sqrt[3]{2}} > x > 0, \frac{\sqrt[3]{2}}{1} \leq x > \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}, \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1} > x$$

3. Решить уравнение

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(20 + 12 \sin x + 5 \cos 2x) = 143.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \arcsin \frac{5}{13} + 2\pi m, n \in \mathbb{Z}$$

4. Через центр O окружности Ω , описанной около треугольника ABC , проведена прямая, параллельная BC и пересекающая стороны AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Окружность ω проходит через точки B_1, C_1 и касается Ω в точке K . Найти угол между прямыми AK и BC . Найти площадь треугольника ABC и радиус окружности Ω , если $B_1C_1 = 6$, $AK = 6$, а расстояние между прямыми BC и B_1C_1 равно 2.

$$AK \perp BC, S = 25, R = \sqrt{29}$$

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x^5| - x + a = 0$$

имеет единственное решение? Решить это уравнение для всех найденных значений a .

$$a \in [-5, 4]$$

6. Прямой круговой конус с вершиной O имеет высоту 4 и образующую длины 5. Пирамида $ABCD$ вписана в конус так, что A и C принадлежат окружности основания, B и D принадлежат боковой поверхности, причем B принадлежит образующей OA . Треугольники OAC и OBD равносторонние, причем $OB = 3$. Найти объём пирамиды $ABCD$, двугранный угол при ребре AB и радиус сферы, описанной около $ABCD$.

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}, R = \frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{6\sqrt{11}}{11}}$$