Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2004 год, вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-2)(x+3) = y(y-5), \\ \log_x(2-y) = \dfrac{x}{y^2}. \end{cases}$$

$(4;-2)$

2. Решить уравнение

$$\sin x\sqrt{1-\cos x-2\sin x} = \sin x + \cos x.$$

$x = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

3. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника AOC, вершина O которого лежит на катете BC прямоугольного треугольника ABC и является центром окружности радиуса R, касающейся гипотенузы AC и проходящей через точку B?

$\frac{R^2}{8\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{5}\right)^{5/2} = \frac{R^2}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{\sqrt{5}+2}$

4. Решить неравенство

$$\frac{5}{6-3\sqrt{6-x-x^2}} - \frac{1}{x+1} > \frac{1}{1+|x+1|}.$$

$-3 \leqslant x < -2,\ -\frac{6}{5} < x < -1,\ 1 < x < 2$

5. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x-a \leqslant 0, \\ x^2-4x+6a \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$a = -1,\ a = 0$

6. Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причем $SK = 5$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC.

$7;\ 24;\ \sqrt{\frac{7}{2}}$