

Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2004 год, вариант 1

1. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^5 + 4x^4 + 5y^2 = 0, \\ x^3 - \frac{y^3}{x^2} = xy - y^2. \end{cases}$$

$$\left(\frac{9}{18}; 6- \right), \left(\frac{9}{18}; 6- \right), (18; 6-)$$

2. Решить уравнение

$$\sin 3x + \cos 2x = \cos 4x - 3|\sin x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u; u\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2} = x; u\pi = x$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\log_{x^2} 9}{\sqrt{\frac{1}{2} + \log_{x^2}(x+1)} - \sqrt{\frac{3}{2}}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\log_3(x+1) - \log_9 x^4}.$$

$$\frac{\pi}{1+\sqrt{x}} > x > 1; \frac{\pi}{1-\sqrt{x}} \geq x > 0; 0 > x > \frac{\pi}{\sqrt{x}-1}$$

4. В параллелограмме $ABCD$ прямые l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и C соответственно, а прямые m_1 и m_2 — биссектрисами углов B и D соответственно. Расстояние между l_1 и l_2 в $\sqrt{3}$ раз меньше расстояния между m_1 и m_2 . Найти угол BAD и радиус окружности, вписанной в треугольник ABD , если $AC = \sqrt{22/3}$, $BD = 2$.

$$\frac{9}{\sqrt{3}} = r; \frac{3}{\pi} = r$$

5. Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$3xy + 16x + 13y + 61 = 0.$$

$$(-6; -7), (-4; 3), (4; -5)$$

6. В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна $5/2$, точка E — середина AB , а F — точка пересечения медиан грани BCD , причем $EF = 8$. Сфера радиуса 5 касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями ABD и BCD , площадь грани BCD и объем пирамиды $ABCD$.

$$\arcsin \frac{24}{25}; 25; \frac{3}{320}$$