Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2003 год, вариант 2

1. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}\left(1-\sin^2 x\cos 2x-2\sin^2 x\right)=1.$$

$\boxed{x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-4x-5}-4}<\frac{1}{2|x+2|-5}.$$

$\boxed{-4-\sqrt{6}<x<-\frac{9}{2},\ -3<x<\frac{-8+\sqrt{22}}{3},\ 5\leqslant x<7}$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\log_5(5x-3y-1)}{\log_5(2y-x+3)}=\dfrac{\log_2(5+4y-3x)-1}{\log_2(3x-y+1)},\\ 2x^2+y^2=3xy+x+1.\end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-1;\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}-2\right)}$

4. В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC и площадью, равной 2, прямые BC и AD касаются окружности диаметром $\sqrt{2}$ в точках B и D соответственно. Боковые стороны трапеции AB и CD пересекают окружность в точках M и N соответственно. Длина MN равна 1. Найти величину угла MBN и длину основания AD.

$\boxed{\angle MBN=\frac{3}{4}\pi,\ AD=\sqrt{6}}$

5. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}|x|+2|y|+|2y-3x|=12,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два действительных решения.

$\boxed{\frac{9}{2},\ \frac{117}{4}}$

6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся:
а) ребер BA, BB_1, BC и плоскости A_1DC_1;
б) ребер BA, BB_1, BC и прямой DA_1.

$\boxed{\text{а) } \frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3};\ \text{б) } 2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$