Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2003 год, вариант 1

1. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $CD = 6\sqrt{13}$, $AE = 8$.

$\boxed{204}$

2. Решить уравнение

$$\sin x + |\cos x| + \sin 4x = \cos 2x.$$

$\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \pi n,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{3\lg^2 x^2 + \lg^2 (x+2)} > \lg x^2 + \lg (x+2).$$

$\boxed{-2 < x < -1,\ -1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ x > 2}$

4. Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4|x|, \\ |x| + |y| \geqslant 2, \\ x^2 - y^2 + 16 - 8x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трем неравенствам системы.

$\boxed{\text{а) } 8\pi,\ \text{б) } 6\pi,\ \text{в) } 4\pi + 4}$

5. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2 + 6y = \dfrac{x}{y} - \sqrt{x - 2y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - 2y}} = x + 3y - 2. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{9}\right),\ (12; -2)}$

6. Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA, DB и DC, а ее центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 3, объем пирамиды $ABCD$ равен $27\sqrt{2}$, ребро $AB = 24$. Найти двугранный угол между гранями ABC и ABD и радиус описанной около $ABCD$ сферы.

$\boxed{\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{4},\ R = \sqrt{\frac{337}{2}}}$